くりこみ群解析による高次元gasket上の self-avoiding pathの漸近的性質

広島大学理学部数学科談話会
20010724
名古屋大学大学院多元数理科学研究科
服部哲弥

この研究は津田稔朗（現第一生命，1998.4–1999.3 立教大学大学院修士課程）との共同研究 [7] に基づく

1　序．

$\mathbb{Z}^d$ 上のself-avoiding walkの漸近的性質は5次元以上ではsimple random walkのそれと等しいことがHara–Sladeによって知られている [1, 2]．他方 4次元以下ではsimple random walkとは異なると予想されているが，このことは証明されていない．Self-avoiding walkは random walk に比べて難しい．過去に通った点は通らないという制約条件のため，マルコフ性を欠くからである．

そこで，Sierpiński gasketおよびその3次元拡張である3次元gasketの上のself-avoiding walkの漸近的性質を研究した [4, 3, 6, 5]．そこで得た知見はくりこみ群の視点から次のように大きく要約できるだろう．

- Self-avoiding walkのくりこみ群は次元とともに変わり，その一般的な解析は非常に難しい．
- くりこみ群の解析をself-avoiding walkの漸近的性質に翻訳する部分は，Sierpiński gasketでも3次元gasketでも大きくは変わらない．

以上のことから，一般の d 次元gasketについて,「後半部分の一般論」は可能かも知れないという期待が生じる．即ち，くりこみ群の性質についてある仮定をおけばself-avoiding walkの漸近的性質に関してしかるべき結論が得られる，という形の定理を得ることが目標となる．このような定理を整備することで，一般次元gasket上のself-avoiding walkのくりこみ群について，何を求めれば十分かが明確になり，難しいくりこみ群解析の一般論への手がかりにもなると期待される．

もちろんたくさんのことを仮定すれば結論を容易に得る．この種の問題意識は，self-avoiding walkの漸近的性質という最初の問題を２つのステップに分ける際の前半と後半の解析の質の差の大きさで正否が決まる．くりこみ群の解析とその確率連鎖の性質への翻訳という２つの部分に分けることが素直であり，また，前半部分はこれまで確率論のsocietyでは注目されてこなかったようだが，self-avoiding walkの解析では本質的である，というのが本講演で伝えたいメッセージである．

目 次

2 定義.

2.1 d 次元 gasket.

$d \geqq 2$ とする． d 次元 pre-gasket を以下のように定義する．$\mathbb{R}^d$ の中に一辺が長さ 1 の d 次元単体 ($d = 2$ ならば正三角形，$d = 3$ ならば正三角錐) を考え，その頂点の集合を $G_0 = \{v_0, v_1, v_2, \cdots, v_d\}$，辺の集合を $B_0 = \{(v_i, v_j) \mid 0 \leqq i < j \leqq d\}$ とし，$F_0 = (G_0, B_0)$ とおく.（ネットワークとして定義したが，辺を線分の集合 $\overline{v_i v_j}$ と自然に同一視する.）

$v_0 = O = (0, 0, \cdots, 0)$ にとっておく．v_i のことを $v_{0,i}$ とも書くことにする．

有限 pre-gasket $F_n = (G_n, B_n)$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, を帰納的に

$$G_{n+1} = \bigcup_{i=0}^{d} (G_n + 2^n v_i),\ B_{n+1} = \bigcup_{i=0}^{d} (B_n + 2^n v_i), \quad n = 1, 2, 3, \cdots, \tag{1}$$

で定義する． $G_0 \subset G_1 \subset \cdots$． F_n は全体として一辺 2^n の d 次元単体 $O v_{n,1} \cdots v_{n,d}$ で，$d + 1$ 個の F_{n-1} をつないだものになっている．

$$F = (G, B); \quad G = \bigcup_{n=0}^{\infty} G_n\,,\ B = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\,, \tag{2}$$

を d 次元 pre-gasket (dSG) と呼ぶことにする．

2.2 Self-avoiding paths.

dSG 上の path $w:\ \mathbb{Z}_+ \to G$ の長さ $L(w) \in \mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\}$ を，最終的に止まるまでの歩数

$$L(w) = \min\{j \in \mathbb{Z}_+ \mid w(i) = w(j),\ i \geqq j\}$$

で定義する．dSG 上の self-avoiding paths (SAP) W_0 を，以下を満たす $w:\ \mathbb{Z}_+ \to G$ の集合とする：

$$\begin{array}{ll} w(i_1) \neq w(i_2), & 0 \leqq i_1 < i_2 \leqq L(w), \\ |w(i) - w(i+1)| = 1, & 0 \leqq i \leqq L(w) - 1, \\ \overline{w(i)w(i+1)} \in B, & 0 \leqq i \leqq L(w) - 1\,. \end{array}$$

3 くりこみ群．

3.1 序．

dSG 上の SAP の漸近的性質を調べるためにはくりこみ群軌道の大局的解析が本質的である．

くりこみ群は統計力学および場の量子論の理論物理学の分野で極めて多くの研究がなされた概念と計算手法を総称する用語である．しかし，くりこみ群なる解析手段の，満足な数学的定義はまだない，というのが講演者の認識である．逆に言えば，ここに，これまで気づかれなかった何かがあるかもしれない．

この講演では，くりこみ群とは，無限自由度系の解析の一手段であって以下の性質を持つもの，と (不十分ながら) しておく．

(i) 距離空間に値を取る確率過程 (path 上の測度) の距離空間のスケール変換に対応する変化 (測度空間の上の力学系) を「適切な」パラメータ空間上の力学系として表現すること．

(ii) 元の問題から決まる初期条件 (canonical surface) からの軌道が大局的に「素直」なこと．

(iii) 軌道の固定点への収束または固定点近傍の線型化が確率過程の漸近的性質を与えること．

最終的に知りたいのは，dSG 上の SAP の歩数が大きいときの漸近的性質，例えば，k 歩の SAP が原点 (出発点) からどれくらい離れるか，ということである．

歩数が増えれば平均的な到達点は遠くなるはずだが，歩数が大きいのに到達点が出発点のすぐ近くだったり，平均より非常に遠いところまで達する path は少ないはずである．(具体的には large deviation 型の評価を念頭に置く.）そこで，歩数を決めて原点からの距離（の期待値）を測る代わりに，到達点を固定して歩数の母関数を考え，到達点を遠くにずらしたときの歩数の増大度を（タウバー型の評価によって）調べれば元の問題を解くことができるだろう．

dSG の図形的な自己相似性に整合するように到達点を距離 2^n に置いたときの母関数 Φ_n を考え，n についての recursion を求める.（この recursion のことをこの問題のくりこみ群と呼ぶことにする.）

この recursion が閉じるように，パラメータを決める必要があるが，このためには SAP の形によって分類する必要があることが Sierpiński gasket と 3SG の研究で分かっている．

3.2 SAP の分類．

dSG を構成する全ての単位 d 次元単体を集めた集合を $\mathcal{T}$ とおく．SAP が一つの単位単体 $\Delta \in \mathcal{T}$ を通る通り方を表す添字集合として，

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_d = \{(i_1, i_2, \cdots, i_k) \in \mathbb{Z}_+^k \mid k = 1, 2, 3, \cdots,\ 0 < i_1 \leqq i_2 \leqq \cdots \leqq i_k\,,\\ i_1 + i_2 + \cdots + i_k + k \leqq d + 1\},\end{aligned} \tag{3}$$

とおく．

Proposition 1 $w \in W_0$ と $\Delta \in \mathcal{T}$ に対して，*SAP* w の単位単体 Δ の通り方を

$$A = \{\overline{w(i)w(i+1)} \in \Delta \mid i = 0, 1, 2, \cdots, L(w)\}.$$

と書く． $A \neq \emptyset$ 即ち w が A を通るならば，ある $I = (i_1, i_2, \cdots, i_k) \in \mathcal{I}_d$ に対して，A は

$$\Delta_I = \{\overline{Ov_1v_2 \cdots v_{i_1-1}v_{i_1}}, \overline{v_{i_1+1} \cdots v_{i_1+i_2}}, \cdots, \overline{v_{i_1+\cdots i_{k-1}+1} \cdots v_{i_1+\cdots i_k}}\}, \tag{4}$$

と合同である．ここで

$$\overline{Ov_1v_2 \cdots v_{i_1-1}v_{i_1}} = \overline{Ov_1}, \overline{v_1v_2}, \overline{v_2v_3}, \cdots, \overline{v_{i_1-1}v_{i_1}}\,,$$

などと略記した．

Example.
- $\mathcal{I}_2 = \{(1), (2)\}$: $A \neq \emptyset$ は $\{\overline{Ov_1}\}$ (1 歩で通り抜ける) か $\{\overline{Ov_1v_2}\}$ (2 歩で通り抜ける) のいずれかと合同．
- $\mathcal{I}_3 = \{(1), (2), (3), (1, 1)\}$: $(1, 1)$ は 1 つの単位正四面体を 2 度通り抜けるケース．

$\diamond$

くりこみ群が閉じるためには path の単位単体の通り方に対応して，F_n 上の 1 本の SAP だけでなく，自己および相互回避 path の組を考える必要がある．$n \in \mathbb{Z}_+$ と $u, v \in G_n$ に対して $W^{(n,u,v)}$ を出発点と到達点が u, v である F_n 内の SAP ($w \in W_0$) の集合

$$W^{(n,u,v)} = \{w \in W_0 \mid w(0) = u,\ w(L(w)) = v, \quad w(i) \in G_n\,,\ i \in \mathbb{Z}_+\},$$

とする．$n \in \mathbb{Z}_+$ と $I = (i_1, i_2, \cdots, i_k) \in \mathcal{I}_d$ に対して

$$\begin{aligned} W_I^{(n)} = \{&(w_1, \cdots, w_k) \in W^{(n,O,v_{n,i_1})} \times W^{(n,v_{n,i_1+1},v_{n,i_1+i_2+1})} \times W^{(n,v_{n,i_1+i_2+2},v_{n,i_1+i_2+i_3+2})} \\ &\times \cdots \times W^{(n,v_{n,i_1+i_2+\cdots+i_{k-1}+k-1},v_{n,i_1+i_2+\cdots+i_k+k-1})} \mid \\ &i \neq j \text{ ならば } w_i \text{ と } w_j \text{ は交わらない，また各 } j \text{ に対して} \\ &w_j \text{ は } v_{n,i_1+i_2+\cdots+i_{j-1}+j-1},\ v_{n,i_1+i_2+\cdots+i_{j-1}+j},\ v_{n,i_1+i_2+\cdots+i_{j-1}+j+1}, \\ &\cdots,\ v_{n,i_1+i_2+\cdots+i_{j-1}+i_j+j-1},\ \text{をこの順に通るが} \\ &\text{他の } \{v_{n,\ell} \mid \ell = 0, 1, 2, \cdots, d\} \text{ は通らない }\}, \end{aligned} \tag{5}$$

とおく．

Example. $d = 4$ のとき $W_I^{(n)}$, $I \in \mathcal{I}_4$, は以下の通り．

$\{(1)\}$: O から $v_{n,1}$ への SAP で $v_{n,2}$, $v_{n,3}$, $v_{n,4}$ を通らないもの.

$\{(2)\}$: O から $v_{n,1}$ を通って $v_{n,2}$ への SAP で $v_{n,3}$, $v_{n,4}$ を通らないもの.

$\{(3)\}$: O から $v_{n,1}$， $v_{n,2}$ をこの順に通って $v_{n,3}$ への SAP で $v_{n,4}$ を通らないもの.

$\{(4)\}$: O， $v_{n,1}$， $v_{n,2}$， $v_{n,3}$， $v_{n,4}$ を通る SAP.

$\{(1,1)\}$: O から $v_{n,1}$ までと $v_{n,2}$ から $v_{n,3}$ までの 2 本の互いに交わらない， $v_{n,4}$ を通らない SAP の組.

$\{(1,2)\}$: O から $v_{n,1}$ までと $v_{n,2}$ から $v_{n,3}$ を通って $v_{n,4}$ までの 2 本の互いに交わらない SAP の組.

$\diamond$

ここに挙げたような SAP やその組 w に対して，それが通る辺の集合を $\hat{w}$ と書く．そして，歩数の拡張 $s_I(w)$ (w が I 型で通る単位単体の個数), $I \in \mathcal{I}_d$, を

$$S_I(w) = \{\Delta \in \mathcal{T}_b \mid \hat{w} \cap \Delta \ \text{ は (4) の } \Delta_I \ \text{ に合同}\}, \tag{6}$$

と $s_I(w) = \sharp S_I(w)$ で定義する．総歩数 L との関係は,

$$\sum_{i=1}^{k} L(w_i) = \sum_{J \in \mathcal{I}_d} |J| s_J(w), \quad w = (w_1, w_2, \cdots, w_k) \in W_I^{(n)}, \ I = (i_1, \cdots, i_k) \in \mathcal{I}_d, \ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{7}$$

ここで

$$|J| = j_1 + \cdots + j_\ell, \quad \text{if} \quad J = (j_1, \cdots, j_\ell). \tag{8}$$

3.3 くりこみ群.

Sierpiński gasket と 3SG で知られている SAP の漸近的性質 (mean square displacement) は一般の dSG ではまだ分かっていない．問題をくりこみ群の大局的軌道解析とその結果の SAP の漸近的性質への翻訳に分けたとき，前者が d によって大きく変わるからである.

そこで，ここでは後半についての一般論，即ち，くりこみ群の軌道について，適切な仮定を置いたときに SAP の漸近的性質を得ることを目標とする.

ここでいうくりこみ群は具体的には，一般化された歩数 $(s_J, \ J \in \mathcal{I}_d)$ の $(W_I^{(n)}, \ I \in \mathcal{I}_d)$ に関する母関数

$$\vec{X}_n = (X_{n,I}, \ I \in \mathcal{I}_d) : \ \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d} \to \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d};$$
$$X_{n,I}(\vec{x}) = \sum_{w \in W_I^{(n)}} \prod_{J \in \mathcal{I}_d} x_J^{s_J(w)}, \quad \vec{x} = (x_J, \ J \in \mathcal{I}_d) \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d}, \ n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{9}$$

の n に関する recursion のことを指す.

Proposition 2 $\vec{X}_n = (X_{n,I}, \ I \in \mathcal{I}_d)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, は

$$\vec{X}_0(\vec{x}) = \vec{x}, \ \vec{x} \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d},$$

および

$$\vec{X}_{n+1} = \vec{\Phi} \circ \vec{X}_n\,, \tag{10}$$

を満たす．ここで

$$\vec{\Phi} = (\Phi_I,\ I \in \mathcal{I}_d) = \vec{X}_1\,,$$

は $\sharp I_d$ 個の変数に関する正係数多項式である．

各項の次数は 2 以上 $d+1$ 以下であり，特に $\Phi_{(1)}$ は ${x_{(1)}}^2$ と ${x_{(1)}}^{d+1}$ を項に持つ．

くりこみ群が閉じるのは dSG が finitely ramified であることから従う．Recursion は F_{n+1} が F_n と合同な $d+1$ 個の d 次元単体からなることから，$w \in W_I^{(1)}$ の各単体 Δ での形 $\hat{w} \cap \Delta$ が $J \in \mathcal{I}_d$ 型のとき，それを $W_J^{(n)}$ の要素で置き換えることで $W_I^{(n+1)}$ の path を得ることから従う．

(10) が定義する ${\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_d}$ 上の力学系を（この問題の）くりこみ群ということにする．

3.4　例 ($d = 2$)．

例として，Sierpiński gasket，即ち 2SG の場合のくりこみ群を具体的に与える．

2 次元単体は正三角形である．$\mathcal{I}_2 = \{(1), (2)\}$ であるが，これに対応して，F_n の O から $2^n a$ までの SAP のうちで $2^n b$ を通るものと通らないものの集合がそれぞれ $W_n^{(1)}, W_n^{(2)}$ である．また，SAP w に対して，1 つの単位三角形の通り方は 1 歩で通り抜けるか折れ曲がって 2 歩で通るか 2 通りである．単位三角形のうち 1 歩で通り抜けるものの個数を $s_{(1)}(w)$, 2 歩で通り抜けるものの個数を $s_{(2)}(w)$ とすると，その結合母関数は

$$\vec{X}_n = (X_{n,(1)}, X_{n,(2)});\quad X_{n,I}(x,y) = \sum_{w \in W_I^{(n)}} x^{s_{(1)}(w)} y^{s_{(2)}(w)},$$

である．これに対してくりこみ群 (10) が成り立つ．

$\vec{\Phi}$ は具体的に path を数えると，

$$\vec{\Phi}(x,y) = ((x+y)^2 + x^2(x+2y), (x+2y)xy). \tag{11}$$

3.5　くりこみ群の不変部分集合．

Sierpiński gasket および 3SG の結果から，RG 写像 $\vec{\Phi}\colon {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_d} \to {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_d}$ の不変部分集合で,「SAP らしさ」を意味するものがあることが推測される．

$\mathcal{I}_d$ の要素 $I = (i_1, \cdots, i_k)$ と $J = (j_1, \cdots, j_\ell)$ に対して $I \oplus J$ を，$i_1, \cdots, i_k, j_1, \cdots, j_\ell$ の非減少列への並べ替えとするとき，$\Xi_d \subset {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_d}$ を

$$\Xi_d = \{\vec{x} \in {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_d} \mid I \oplus J \in \mathcal{I}_d \text{ なる全ての } I, J \in \mathcal{I}_d \text{ に対して } x_{I \oplus J} \leqq x_I x_J\} \tag{12}$$

で定義する．

Example. $\Xi_3 = \left\{\vec{x} \in {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_3} \mid x_{(11)} \leqq x_{(1)}^2\right\}$, $\Xi_4 = \left\{\vec{x} \in {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_4} \mid x_{(11)} \leqq x_{(1)}^2,\ x_{(12)} \leqq x_{(1)} x_{(2)}\right\}$.
◇

Proposition 3 Ξ_d は $\vec{\Phi}$ の不変部分集合.

4 主結果．

4.1 くりこみ群の言葉で書いた仮定．

Sierpiński gasket と 3SG の経験に基づいて，dSG 上の SAP の漸近的性質を保証するくりこみ群の軌道の性質を定式化する．

$\vec{x}_c \in {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_d}$ が self-avoiding fixed point (SAFP) であるとは以下が成り立つことをいう．

(FP1) $\vec{\Phi}(\vec{x}_c) = \vec{x}_c$.

(FP2) Proposition 2 の $\vec{\Phi}$ の Jacobi 行列を $\mathcal{J} = (\mathcal{J}_{IJ})$ とおく：

$$\mathcal{J}_{IJ}(\vec{x}) = \frac{\partial \Phi_I}{\partial x_J}(\vec{x}),\ \ I, J \in \mathcal{I}_d\,,\ \vec{x} \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d}. \tag{13}$$

このとき $\mathcal{J}(\vec{x}_c)$ は対角化可能で，絶対値が最大の固有値 λ は $\lambda > 1$ を満たし，その他の固有値は絶対値が 1 未満である．

λ に対応する左固有ベクトルを $\vec{v}_L = (v_{L,I},\ I \in \mathcal{I}_d)$ とする：

$$\sum_{I\in\mathcal{I}_d} v_{L,I}\mathcal{J}_{IJ}(\vec{x}_c) = \lambda v_{L,J}\,,\ \ J \in \mathcal{I}_d\,.$$

Fröbenius の定理から全成分非負としてよいが，このとき， $v_{L,J} > 0,\ J \in \mathcal{I}_d$.

右固有ベクトル $\vec{v}_R$ については $v_{R,(1)} > 0$.

(FP3) $x_{c,I} \neq 0$ なる $I \in \mathcal{I}_d$ に対して，Φ_I に次の性質を持つ $\displaystyle\prod_{J\in\mathcal{I}_d} {x_J}^{m_J}$ なる項がある：

$m_{(1)} > 0$，かつ， $x_{c,J} = 0$ なる全ての J に対して $m_J = 0$ を満たす．

(FP4) $\vec{x}_c \in \Xi_d \setminus \{\vec{0}\}$.

Remark. (i) Jacobi 行列の固有値の 1 つが 1 より大きい実数であることは容易に分かる．それ以外は 1 より小さいことは $d = 2, 3, 4$ でしか分かっていない．

(ii) $d = 3$ では $\vec{\Phi}$ の固定点は ${\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_3} \setminus \{0\}$ に複数あることが分かっているが，SAP の漸近的性質に関係する固定点は Ξ_3 の中にある SAFP である．

$\diamond$

$d = 2, 3$ では SAFP $\vec{x}_c$ はただ一つ存在し，0 座標成分を持っている．それらの成分座標が 0 であるような集合は $\vec{\Phi}$ の不変部分集合になる．その不変部分集合に対応する SAP が，元の SAP の漸近的性質にとって本質的であることが分かっている．

$\mathcal{K} \subset \mathcal{I}_d$ に対して，記号を少し乱用して，

$${\mathbb{R}_+}^{\mathcal{K}} = \{\vec{x} \in {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_d} \mid x_J = 0,\ J \notin \mathcal{K}\}\ \subset\ {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_d}, \tag{14}$$

と書く．

Proposition 4 *SAFP* $\vec{x}_c$ に対して

$$\mathcal{K}_{\vec{x}_c} = \{I \in \mathcal{I}_d \mid x_{c,I} \neq 0\}, \tag{15}$$

とおき，

$${\mathbb{R}_+}^{\mathcal{K}_{\vec{x}_c}} = \{\vec{x} \in {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_d} \mid x_J = 0,\ J \notin \mathcal{K}_{\vec{x}_c}\},$$

と書く．このとき，${\mathbb{R}_+}^{\mathcal{K}_{\vec{x}_c}}$ は $\vec{\Phi}$ の不変部分集合．

$d=2,3$ では $\mathcal{K}_{\vec{x}_c}$ は次の $\mathcal{K}_{res}$ に等しいことが分かっている．

Proposition 5

$$\mathcal{K}_{res} = \{(1), (11), \cdots, (1\cdots1)\} \tag{16}$$

とおくとき，${\mathbb{R}_+}^{\mathcal{K}_{res}}$ は $\vec{\Phi}$ の不変部分集合．

$\mathcal{K}_{res}$ は単位単体を毎回１歩で通り抜ける path に対応する．

$\vec{x}_c$ を SAFP とするとき，$\vec{x} \in {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_d}$ が以下を満たすとき，$\vec{x}_c$ の domain of attraction にあると言う．

(DA1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \vec{X}_n(\vec{x}) = \vec{x}_c$.
(DA2) If $x_{c,I} \neq 0$ then $x_I \neq 0$.

$\vec{x}_c$ の domain of attraction にある $\vec{x} \in {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_d}$ の集合を $\mathcal{D}om(\vec{x}_c)$ と書く．

${\mathbb{R}_+}^{\mathcal{K}_{res}}$ に対応する SAP の部分集合を用意する．

(5) で定義された path 集合 $W_I^{(n)}$ の部分集合として，$\mathcal{K} \subset \mathcal{I}_d$ に対して $W_{\mathcal{K},I}^{(n)}$ を

$$W_{\mathcal{K},I}^{(n)} = \{w \in W_I^{(n)} \mid s_J(w) = 0,\ J \notin \mathcal{K}\} \tag{17}$$

で定義する．$W_{\mathcal{I}_d,I}^{(n)} = W_I^{(n)}$，即ち，$\mathcal{K} = \mathcal{I}_d$ のときは元の full model である．部分モデル $W_{\mathcal{K},I}^{(n)}$ に対応する母関数として，

$$X_{\mathcal{K},n,I}(\vec{x}) = \sum_{w \in W_{\mathcal{K},I}^{(n)}} \prod_{J \in \mathcal{K}} x_J^{s_J(w)}, \quad \vec{x} = (x_J,\ J \in \mathcal{K}) \in \mathbb{C}^{\mathcal{K}},\ n = 0,1,2,\cdots,\ I \in \mathcal{I}_d, \tag{18}$$

を定義する．

${\mathbb{R}_+}^{\mathcal{K}}$ が ${\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_d}$ の不変部分集合のとき，$\vec{X}_{\mathcal{K},n}$ は (10) で $J \notin \mathcal{K}$ に対応する成分を 0 とおいたものを満たす．$\mathcal{K} \subset \mathcal{I}_d$ と $\beta \in \mathbb{R}$ に対して，$\vec{x}_{can,\mathcal{K}}(\beta) = (x_{can,\mathcal{K},I}(\beta),\ I \in \mathcal{I}_d)$ を

$$x_{can,\mathcal{K},I}(\beta) = \begin{cases} e^{-\beta|I|}, & I \in \mathcal{K}, \\ 0, & I \notin \mathcal{K}, \end{cases} \tag{19}$$

で定義する．ここで $|I|$ は (8) で与えた．統計力学の概念を流用して，$\mathcal{K}$ が定める SAP の集合の分配関数 $\vec{Z}_{\mathcal{K},n} = (Z_{\mathcal{K},n,I}\ ,\ I \in \mathcal{I}_d)$ を

$$Z_{\mathcal{K},n,I}(\beta) = \sum_{w \in W_{\mathcal{K},I}^{(n)}} e^{-\beta L(w)}, \quad \beta \in \mathbb{R},\ n = 0,1,2,\cdots, \tag{20}$$

で定義する．(7) と合わせると，

$$Z_{\mathcal{K},n,I}(\beta) = X_{\mathcal{K},n,I}(\vec{x}_{can,\mathcal{K}}(\beta)). \tag{21}$$

$\mathcal{K} = \mathcal{I}_d$ のときは $\vec{x}_{can}(\beta) = \vec{x}_{can,\mathcal{I}_d}(\beta)$ や $\vec{Z}_n(\beta) = \vec{Z}_{\mathcal{I}_d,n}(\beta)$ と略記する．このとき，

$$Z_{n,I}(\beta) = X_{n,I}(\vec{x}_{can}(\beta)) = \sum_{w \in W_I^{(n)}} e^{-\beta L(w)}, \quad \beta \in \mathbb{R},\ n = 0,1,2,\cdots. \tag{22}$$

(17) の SAP の集合で $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{res}$ と置いたものを restricted SAP と呼び，対応する (18) の母関数を restricted model に対する母関数，等と呼ぶことにする．

SAP の漸近的性質 (Theorem 8) はくりこみ群の固定点近傍の振る舞いだけでは決まらず，くりこみ群軌道の大局的な追跡が必要である．このことに対応して以下を定義する．

(CS1) $\beta_c \in \mathbb{R}$ が full model の臨界点であるとはSAFP $\vec{x}_c$ に対して $\vec{x}_{can}(\beta_c) \in \mathcal{D}om(\vec{x}_c)$ であることを言う.

(CS2) $\beta_{c,res} \in \mathbb{R}$ が restriced model の臨界点であるとはSAFP $\vec{x}_c$ に対して $\vec{x}_{can,\mathcal{K}_{res}}(\beta_{c,res}) \in \mathcal{D}om(\vec{x}_c)$ であることを言う.

(12) の定義から,

$$\vec{x}_{can}(\beta_c) \in \Xi_d\,, \quad \text{及び} \quad \vec{x}_{can,\mathcal{K}_{res}}(\beta_{c,res}) \in \Xi_d\,. \tag{23}$$

4.2 仮定の下での SAP の漸近的性質.

先ず,臨界点 β_c は母関数の漸近形によって次のように特徴づけられる.

Theorem 6 $\beta_c \in \mathbb{R}$ が *full model* の臨界点で,$\vec{x}_c$ が *(CS1)* で定まる対応する固定点ならば $I \in \mathcal{I}_d$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} Z_{n,I}(\beta) = \begin{cases} 0, & \beta > \beta_c\,, \\ x_{c,I}\,, & \beta = \beta_c\,. \end{cases}$$

また,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{d} Z_{n,(i)}(\beta) = \infty, \quad \beta < \beta_c\,.$$

特に,臨界点は(存在すれば)ただ一つである.*Restricted model (CS2)* についても同様である.

臨界点が高々一つしかないので,(CS1) によって臨界点に対応する SAFP も一つしかない.SAFP の唯一性は $d = 2, 3, 4$ では証明されているが,一般には分かっていないし,極めて難しい.しかし,上記によって臨界点に対応する SAFP は well-defined である.この概念は Theorem 8 を述べるときに用いる.

母関数の漸近的性質は次の意味で歩数分布の漸近形に関係がある.$I \in \mathcal{I}_d$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\vec{x} \in {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_d}$ に対して,$W_I^{(n)}$ 上の確率測度 $\mu_{\vec{x},n,I}$ を,$X_{n,I}(\vec{x}) \neq 0$ なるとき,

$$\mu_{\vec{x},n,I}[\{w\}] = \frac{1}{X_{n,I}(\vec{x})} \prod_{J\in\mathcal{I}_d} x_J^{s_J(w)}, \quad w \in W_I^{(n)}, \tag{24}$$

で定義する.このような母関数型の確率測度を考えるのは,くりこみ群の分析を用いることと,Tauber 型の評価によって一様分布の結果を得ること,が狙いである.

(DA1) から,$x_{c,I} \neq 0$ と $\vec{x} \in \mathcal{D}om(\vec{x}_c)$ が成り立てば,十分大きな n に対して $X_{n,I}(\vec{x}) > 0$ となるので,$\vec{x} \in \mathcal{D}om(\vec{x}_c)$ ならば $\mu_{\vec{x},n,I}$ は定義される.

Theorem 7 $\vec{x}_c$ が *SAFP* で $\vec{x} \in \mathcal{D}om(\vec{x}_c)$ ならば,以下が成り立つ.

(i) $f_d \times f_d$ 非負成分行列 $\Lambda(\vec{x})$ が存在して,

$$\Lambda(\vec{x}) = \lim_{n\to\infty} \lambda^{-n} \mathcal{J}_n(\vec{x}) \tag{25}$$

が成り立つ.ここで,$\mathcal{J}_n$ は

$$\mathcal{J}_{nIJ}(\vec{x}) = \frac{\partial X_{n,I}}{\partial x_J}(\vec{x}), \quad I, J \in \mathcal{I}_d\,,\ \vec{x} \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d},$$

で定義される行列.

(ii) $I \in \mathcal{K}_{\vec{x}_c}$ に対して，スケールされた一般化歩数 $(\lambda^{-n} s_J\,,\ J \in \mathcal{K}_{\vec{x}_c})$ の *(24)* の $\mu_{\vec{x},n,I}$ の下での結合分布 $p_{\vec{x},n,I}$ は $n \to \infty$ で $\mathbb{R}^{\mathcal{I}_d}$ 上のボレル測度 $p^*_{\vec{x},I}$ に弱収束する．ここで λ は *(FP2)* の通り．$p^*_{\vec{x},I}$ は ${\mathbb{R}_+}^{\mathcal{I}_d}$ の上に *support* されている．

$$\varphi^*_{\vec{x},I}(\vec{t}) = \int_0^\infty e^{\vec{t}\cdot\vec{\xi}} p^*_{\vec{x},I}[d\vec{\xi}], \quad \vec{t} \in \mathbb{C}^{\mathcal{K}_{\vec{x}_c}}$$

で定義された母関数 $\varphi^*_I = \varphi^*_{\vec{x},I}$ は $\vec{t} = (t_J,\ J \in \mathcal{K}_{\vec{x}_c})$ の関数として正則である．

(iii) $\varphi^*_I = \varphi^*_{\vec{x},I}\,,\ I \in \mathcal{K}_{\vec{x}_c}\,,$ は

$$\begin{aligned} & x_{c,I}\,\frac{\partial \varphi^*_I}{\partial t_J}(\vec{0}) = \Lambda_{IJ}(\vec{x})\,x_J\,, \quad \textit{if}\ \ I,\,J \in \mathcal{K}_{\vec{x}_c}\,, \\ & x_{c,I}\varphi^*_I(\lambda\vec{t}) = \Phi_I(\vec{x}_c\,\vec{\varphi}^*(\vec{t})),\ \ \vec{t} \in \mathbb{C}^{\mathcal{K}_{\vec{x}_c}}, \quad \textit{if}\ \ I \in \mathcal{K}_{\vec{x}_c}\,, \end{aligned} \tag{26}$$

によって定まる．ここで，$J \notin \mathcal{K}_{\vec{x}_c}$ のとき $\varphi^*_J = 0$ とおき，$\vec{\Phi}$ の変数の中で記号法を乱用して

$$(\vec{x}\,\vec{\varphi}^*(\vec{t}))_J = x_J\,\varphi^*_J(\vec{t}), \ \ J \in \mathcal{I}_d,$$

と書いた．

(iv) $\vec{x} \in \mathcal{D}om(\vec{x}_c) \cap \Xi_d$ かつ $I \in \mathcal{K}_{\vec{x}_c}$ ならば $w \in W_I^{(n)}$ のスケールされた長さ $\lambda^{-n}L(w)$ の $\mu_{\vec{x},n,I}$ の下での分布の弱収束極限は C^∞ 密度関数 $\overline{\rho}^*_{\vec{x},I}$ を持つボレル確率測度 $\overline{p}^*_{\vec{x},I}$ に弱収束する．
特に，$\overline{\rho}^*_{\vec{x},(1)}(\xi) > 0,\, \xi > 0\,.$

$w \in W_I^{(n)}$ は端点を固定した path 集合なので，Theorem 7 は端点を固定したときの長さの分布の漸近形に関する結果である．

これ（およびいくつかの性質）から，次のように，歩数を固定したときの到達点の距離の分布に関する結果を得る．

$W^{(0)}$ を原点 O から出発する SAP の集合とする：$W^{(0)} = \{w \in W_0 \mid w(0) = O\}$．また，(17) と同様に $\mathcal{K} \subset \mathcal{I}_d$ に対して $W^{(0)}_{\mathcal{K}} = \{w \in W^{(0)} \mid s_J(w) = 0,\ J \notin \mathcal{K}\}$ とおく．

$k \in \mathbb{Z}_+$ に対して

$$N(k) = \sharp\{w \in W^{(0)} \mid L(w) = k\}$$

を O から出発し歩数 k の SAP の本数とし，$\mathcal{K} \subset \mathcal{I}_d$ に対して，

$$N_{\mathcal{K}}(k) = \sharp\{w \in W^{(0)}_{\mathcal{K}} \mid L(w) = k\}$$

とする．

Theorem 8 *Full model* の臨界点 $\beta_c \in \mathbb{R}$ が存在すれば

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\,\log N(k) = \beta_c\,.$$

Restricted model の臨界点 $\beta_{c,res} \in \mathbb{R}$ が存在すれば

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\,\log N_{\mathcal{K}_{res}}(k) = \beta_{c,res}\,.$$

自然数 k に対して，歩数 k の SAP の集合上の一様分布を $\tilde{P}_k$ とする．即ち，

$$\tilde{P}_k[A] = \frac{1}{N(k)} \sharp\{w \in A \mid L(w) = k\}, \quad A \subset W^{(0)}.$$

次の結果は，mean square displacement の指数の存在を意味する．即ち，(対数比の意味で) 長さ $L(w) = k$ の典型的な SAP w は $|w(k)| \asymp k^{1/d_w}$ 程度の距離に届く．ここで，

$$d_w = \frac{\log \lambda}{\log 2}. \tag{27}$$

Theorem 9 *Full model* の臨界点 $\beta_c \in \mathbb{R}$ があれば

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{\log k} \log E_k[|w(k)|^{s\, d_w}] = s, \quad s \geqq 0.$$

ここで E_k は $\tilde{P}_k$ に関する期待値，$|\cdot|$ は $\mathbb{R}^d \supset F$ のユークリッド距離．*Restricted model* に関しても同様である．

Theorem 9 は d 次元 gasket 上の SAP が Theorem 9 の結論に示された漸近的性質を持つための十分条件をくりこみ群の言葉，即ち，ある不変部分空間における固定点 (SAFP) の存在と canonical surface 上のある点 (臨界点) からのくりこみ群軌道の収束，および若干の技術的条件，で記述することができたことを意味する．

言い換えると，SAP の漸近的性質の問題を，くりこみ群の大局的軌道解析の問題と，path の漸近的性質への翻訳の 2 つの問題に分離し，後者については解決したことになる．

Theorem 8 と Theorem 9 の仮定は (従って，結論も) Sierpiński gasket で成り立つ [4, 6] 他に 3 次元 Sierpiński gasket でも成り立つ [5] ことが分かっていた．今回の研究の応用として，4 次元 Sierpiński gasket 上の restricted model でも成り立つことを今回証明した (Section 5.2)．しかし，SAP のくりこみ群の軌道解析は dSG への一般化は極めて難しい．言い換えれば，高次元 Sierpiński gasket 上の SAP の性質はくりこみ群の軌道解析の部分が難しい，興味深い問題である．

5 証明の概略．

5.1 仮定から漸近的性質を得ること．

スケール n ($\vec{X}_n$ の n) が大きいということは，path の端点の距離が遠いことを意味するので歩数 L の大きい path に対応する．従って，くりこみ群 Proposition 2 はスケール変換に対する，SAP の集合の応答を，一般化した長さ s_I の母関数の変数のパラメータ空間の上の map $\vec{\Phi}$ として表現している．従って $\vec{\Phi}$ が定める力学系の軌道の大局的性質が，dSG 上の SAP の歩数が大きいときの漸近的性質を与えることが期待される（実際，与える）.

d 次元 Sierpiński gasket の場合，対応するくりこみ群の固定点は ${\mathbb{R}_+}^{[d/2]}$ 上のくりこみ群の固定点として与えられる．SAP の漸近的性質が次元 d によって著しく異なると考えられていることから考えればくりこみ群が d によって大きく変わることは不思議なことではないけれども，SAP は，random walk と異なり，Sierpiński gasket における結果の高次元 Sierpiński gasket への一般化が極めて困難であることを示唆する．

Theorem 6 はアイデアは難しくない．$\vec{\Phi}$ の各成分は 2 次以上の多項式なので，β が小さい，即ち，$\vec{x}$ の各成分が小さければ，$X_{n,I}(\vec{x})$ は漸近的に少なくとも $(1/(\max_J x_J))^{-2^n}$ の速さで 0 に近づく．また，同様に β が大きければ ∞ に発散する．β に関する単調性と臨界点 β_c の定義を合わせれば主張を得る．

Theorem 7 は概略以下の方針で証明される．

$\vec{X}_n \to \vec{x}_c$ に注意すると

$$\mathcal{J}_n = \left(\frac{\partial X_{n,I}}{\partial x_J}\right) \approx M \mathcal{J}(\vec{x}_c)^n.$$

λ が $\mathcal{J}_n(\vec{x}_c)$ の最大固有値だから (25) を得る．

$\vec{x} = (x_I,\ I \in \mathcal{I}_d) \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d}$ と $\vec{t} = (t_I,\ I \in \mathcal{I}_d) \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d}$ に対して（記法を乱用して）

$$\vec{x}(\vec{t}) = (x_I \exp(\lambda^{-n} t_I),\ I \in \mathcal{I}_d), \tag{28}$$

と書く．

$I \in \mathcal{K}_{\vec{x}_c}$ に対して，スケールされた一般化歩数 $(\lambda^{-n} s_J,\ J \in \mathcal{I}_d)$ の (24) の $\mu_{\vec{x},n,I}$ の下での結合分布 $p_{\vec{x},n,I}$ の母関数は，(9) から，

$$\int_0^\infty e^{\vec{t}\cdot\vec{\xi}} p_{\vec{x},n,I}[d\vec{\xi}] = \frac{X_{n,I}(\vec{x}(\vec{t}))}{X_{n,I}(\vec{x})}\,, \quad \vec{t} \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d}, \tag{29}$$

となる．Recursion で定義される多変数正則関数の一般的な議論によって右辺が広義一様収束することが分かる．(29) がくりこみ群と歩数分布（但し端点固定）を結びつける．

右辺が広義一様収束することの要点は次の通り．SAFP の仮定から $\vec{\Phi}$ のヤコビ行列 $\mathcal{J}$ の SAFP $\vec{x}_c$ での固有値について，最大のものが $\lambda > 1$ であること，および，λ に対応する左固有ベクトルが 0 成分を持たないこと，を用いて，

$$|\vec{z}|_* = \sum_{I \in \mathcal{I}_d} v_{L,I}\, |z_I|,$$

を定義すると，これが (FP2) の下でノルムになって，しかも，

$$|\mathcal{J}(\vec{x}_c)\, \vec{z}|_* \leqq \lambda |\vec{z}|_*\,, \quad \vec{z} \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}_d}, \tag{30}$$

を得る．また，λ 以外の固有値が絶対値 1 未満であることも使うと，$\vec{X}_n(\vec{x})$ の $\vec{x}_c$ への収束は n について指数関数的なことも分かり，また，$\vec{X}_n(\vec{x})$ のヤコビ行列を λ^{-n} 倍したものの収束も分かる．これらから，(29) の右辺の広義一様収束を得る．即ち，$p_{\vec{x},n,I}$ の弱収束が言える．

Theorem 7 の密度の存在と滑らかさは，仮定によって総歩数の分布の分散が正であること，および recursion から，極限特性関数が遠方で急減少することを示して証明する．正値性は，密度の滑らかさと分散が正であることに基づく．

Theorem 8 の証明は以下に基づく．上からの評価については，$\nu:\ W^{(0)} \to \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ を

$$\nu(w) = \min\{n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\} \mid w(k) \in G_n\,,\ k = 0, 1, 2, \cdots, L(w)\}, \quad w \in W^{(0)}. \tag{31}$$

で定義して

$$\zeta_n = \sum_{w \in W^{(0)};\, \nu(w) \leqq n} e^{-\beta_c L(w)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{32}$$

とおくと， Proposition 2 と同様の図形的考察から，$f_1(\vec{0})=1$ なる最高次数 $d+1$ の正係数多項式 $f_1\colon\ \mathbb{R}^{\mathcal{I}_d}\to\mathbb{R}$ が存在して

$$\zeta_{n+1}\leqq f_1(\vec{Z}_n(\beta_c))\zeta_n,\quad n\in\mathbb{Z}_+, \tag{33}$$

を満たす．これと仮定 (CS1) ($\vec{Z}_n(\beta_c)$ が bounded) と，自明の関係式 $L>2^{\nu-1}$ から，

$$N(k)e^{-\beta_c k}\leqq\sum_{\nu(w)\leqq 1+\frac{\log k}{\log 2}}e^{-\beta_c L(w)}\leqq\zeta_{1+\frac{\log k}{\log 2}}$$

のようにして上からの評価を得る．

Theorem 8 の下からの評価は，λ を今まで通り，β_c を full model の臨界点，$\vec{x}_{can}(\beta_c)=\vec{x}_{can,\mathcal{I}_d}(\beta_c)$ を (19) の通りとする．Theorem 6, Theorem 7 等から，スケールされた総歩数の分布 $\overline{p}_{\vec{x}_{can}(\beta_c),n,I}$ の収束の速さに関する次の評価を得る（Tauber 型の議論）．

Proposition 10 *$b>0$, $n\in\mathbb{Z}_+$, $\xi\in\mathbb{R}$, に対して，$c_n=b\lambda^{-n}\sqrt{n}$ および $h_n(\xi)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}c_n}e^{-\xi^2/(2c_n^2)}$ とおく．このとき，十分大きな b に対して $\xi\in\mathbb{R}$ に関して一様に*

$$\lim_{n\to\infty}(\overline{p}_{\vec{x}_{can}(\beta_c),n,I}*h_n)(\xi)=\overline{\rho}^*_{\vec{x}_{can}(\beta_c),I}(\xi),\quad I\in\mathcal{K}_{\vec{x}_c}.$$

ここで，

$$(\overline{p}_{\vec{x},n,I}*h_n)(\xi)=\int_{\mathbb{R}}h_n(\xi-\eta)\,\overline{p}_{\vec{x},n,I}(d\eta)$$

は convolution.

Proposition 10 の証明の要点は以下の通り．Theorem 7 の極限分布の特性関数が遠方で急減少することから $\overline{p}_{\vec{x},n,I}$ の特性関数もある範囲で減少する．しかし，離散分布なので遠方では原理的に減少しない．$\overline{p}_{\vec{x},n,I}$ と h_n の convolution をとって均すと特性関数に h_n の特性関数をかけることになって，遠方の decay を保証する．この結果，均された分布の密度は極限分布の密度に近くなる．

Proposition 10 が成り立つ b に対して，$d_n=\sqrt{2n\log\lambda}c_n=\sqrt{2\log\lambda}\,b\,n\,\lambda^{-n}$, $n\in\mathbb{Z}_+$, とおくと，Proposition 10 から

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\Big|\int_{[\xi-d_n,\xi+d_n]}h_n(\xi-\eta)\,\overline{p}_{\vec{x}_{can}(\beta_c),n,(1)}(d\eta)-\overline{\rho}^*_{\vec{x}_{can}(\beta_c),(1)}(\xi)\Big|\\&\leqq\lim_{n\to\infty}\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}\setminus[\xi-d_n,\xi+d_n]}h_n(\xi-\eta)\,\overline{p}_{\vec{x}_{can}(\beta_c),n,(1)}(d\eta)\\&\leqq\lim_{n\to\infty}h_n(d_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi b^2 n}}=0\,.\end{aligned}$$

密度 $\overline{\rho}^*_{\vec{x}_{can}(\beta_c),(1)}$ が正であること (Theorem 7) から，$\epsilon>0$ が存在して，十分大きい n に対して

$$\overline{p}_{\vec{x}_{can}(\beta_c),n,(1)}([\xi-d_n,\xi+d_n])\geqq c_n\epsilon,\quad\xi\in[\lambda^{-1},\lambda].$$

十分大きな自然数 k に対して自然数 n を $\lambda^{-n}k\in[1,\lambda)$ となるように選ぶと上記から，

$$\overline{p}_{\vec{x}_{can}(\beta_c),n,(1)}([\lambda^{-n}k-2d_n,\lambda^{-n}k])\geqq c_n\epsilon.$$

他方，path を延ばすことで単射 $\{w \in W_{(1)}^{(n)} \mid L(w) \leqq k\} \to \{w \in W^{(0)} \mid L(w) = k\}$ の存在が分かるから，

$$Z_{n,(1)}(\beta_c) c_n \epsilon \leqq \sum_{w \in W_{(1)}^{(n)};\, k - 2d_n \lambda^n \leqq L(w) \leqq k} e^{-\beta_c L(w)} \leqq e^{2\beta_c d_n \lambda^n} e^{-\beta_c k} N(k).$$

これらより，Theorem 8 の下からの評価を得る．

Theorem 9 の証明は次の要素から成り立つ．

(i) 期待値 E_k の分母 $N(k)$ に関する Theorem 8 の評価．

(ii) 長い path と短い path についての大偏差的評価．
$\displaystyle\sum_{\substack{w \in W^{(0)};\\ \nu(w) \leqq n,\\ L(w) \geqq \lambda^{n+(m/2)}}} e^{-\beta_c L(w)}$ と $\displaystyle\sum_{\substack{w \in W^{(0)};\\ \nu(w) = n+1,\\ L(w) \leqq \lambda^{n-m}}} e^{-\beta_c L(w)}$ が小さいことを recursion から証明する．
これによって，$E_k[\|w\|^{sd_w}]$ についての対応する評価が得られる．ここで $w \in W^{(0)}$ に対して $\nu(w)$ は (31) で定義されている．また，

$$\|w\| = \max\{|w(k)| \mid k = 0, 1, 2, \cdots, L(w)\}.$$

$|\cdot|$ は $\mathbb{R}^d \supset F$ のユークリッド距離．

(iii) Reflection principle.
これによって $\|w\|$ に関する評価と $|w(k)|$ に関する評価が comparable であることを得る．

5.2 $d = 4$ の場合に仮定を満たすこと．

$d = 4$ の restricted model の場合に，くりこみ群の言葉で書かれた定理の仮定を満たすことを確認する．くりこみ写像 $\vec{\Phi}$ (Proposition 2) は 6 次元空間 $\mathbb{C}^{\mathcal{I}_4}$ 上の写像．ここで，$\mathcal{I}_4 = \{(1), (1,1), (2), (3), (4), (1,2)\}$．Restricted model を考えるので，$\mathcal{K}_{res} = \{(1), (11)\}$．Restricted path は (17) より $s_J(w) = 0,\ J \notin \mathcal{K}_{res}$ で定義される．

$$\mathbb{R}_+{}^{\mathcal{K}_{res}} = \{(x_{(1)}, x_{(11)}, 0, \cdots, 0) \mid x_{(1)}, x_{(11)} \in \mathbb{R}_+\} \subset \mathbb{R}_+{}^{\mathcal{I}_4}.$$

$\vec{\Phi}$ をあらわに計算することで以下を得る．

Proposition 11 *(i)* $\vec{\Phi}$ は $x_I,\ I \in \{(1), (11), (2), (3), (4), (12)\}$ の 6 変数の 6 成分正係数多項式．各項の次数は 2 以上 5 以下．

(ii)

$$\begin{aligned} \Phi_{(1)}(x, y, 0, 0, 0, 0) &= x^2 + 3x^3 + 6x^4 + 6x^5 + 12x^3 y + 30x^4 y + 18x^2 y^2 \\ &\quad + 78x^3 y^2 + 96x^2 y^3 + 132xy^4 + 132y^5, \\ \Phi_{(1,1)}(x, y, 0, 0, 0, 0) &= x^4 + 2x^5 + 4x^3 y + 13x^4 y + 32x^3 y^2 + 88x^2 y^3 \\ &\quad + 22y^4 + 220xy^4 + 186y^5. \end{aligned} \tag{34}$$

(iii) 以下を満たす正係数多項式 $\Phi_{I,i}$，$I = (1), (11),\ i = 0, 1, 2, 3, 4,$ が存在する．

$\Phi_{(1),0}$ は $x_{(1)}^2$ を項として持つ．$\Phi_{(11),0}$ は $x_{(1)}^4$ を項として持つ．さらに，

$$
\begin{aligned}
\Phi_{(1)}(\vec{x}) &= \Phi_{(1),1}(\vec{x})\,x_{(1)} + \tfrac{1}{2}\Phi_{(1),2}(\vec{x})\,x_{(2)} + \tfrac{1}{3}\Phi_{(1),3}(\vec{x})\,x_{(3)} + \Phi_{(1),4}(\vec{x})\,x_{(11)} \\
&\quad + \Phi_{(1),0}(\vec{x}), \\
\Phi_{(2)}(\vec{x}) &= \Phi_{(1),1}(\vec{x})\,x_{(2)} + \Phi_{(1),2}(\vec{x})\,x_{(3)} + \Phi_{(1),3}(\vec{x})\,x_{(4)} + \Phi_{(1),4}(\vec{x})\,x_{(12)}\,, \\
\Phi_{(11)}(\vec{x}) &= \Phi_{(11),1}(\vec{x})\,x_{(1)} + \tfrac{1}{2}\Phi_{(11),2}(\vec{x})\,x_{(2)} + \tfrac{1}{3}\Phi_{(11),3}(\vec{x})\,x_{(3)} + \Phi_{(11),4}(\vec{x})\,x_{(11)} \\
&\quad + \Phi_{(11),0}(\vec{x}), \\
\Phi_{(12)}(\vec{x}) &= \Phi_{(11),1}(\vec{x})\,x_{(2)} + \Phi_{(11),2}(\vec{x})\,x_{(3)} + \Phi_{(11),3}(\vec{x})\,x_{(4)} + \Phi_{(11),4}(\vec{x})\,x_{(12)}\,.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

(iv) 各 $I \notin \mathcal{K}_{res}$ に対して自然数 $m = m_I$, $m' = m'_I$ が存在して，$\Phi_{(1)}$, $\Phi_{(11)}$ はそれぞれ $x_{(1)}^m x_I$, $x_{(1)}^{m'} x_I$ を項として持つ．

(v) $I \notin \mathcal{K}_{res}$ ならば，Φ_I の各項はある $J \notin \mathcal{K}_{res}$ に対して x_J の正べきを含む．さらに，$\Phi_{(3)}$ と $\Phi_{(4)}$ の各項は，合計2次以上の $J \notin \mathcal{K}_{res}$ なる x_J 達を含む．$\Phi_{(2)}$ は $x_{(1)}^3 x_{(11)} x_{(12)}$ を項として持ち，$\Phi_{(12)}$ は $x_{(1)}^4 x_{(2)}$ を項として持つ．

このことから固定点に関して以下を得る．証明は具体的かつ長い．

Theorem 12 *(i)* $\Phi_{(1)}(x, y, 0, 0, 0, 0) = x$, $\Phi_{(11)}(x, y, 0, 0, 0, 0) = y$ は $\{(x, y, 0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}_+{}^{\mathcal{K}_{res}} \mid (x, y, 0, 0, 0, 0) \in \Xi_4 \setminus \{\vec{0}\}\}$ にただ一つの解 $\vec{x}_c = (x_c, y_c, 0, 0, 0, 0)$ を持つ．$x_c = 0.326490898\cdots$, $y_c = 0.027929572\cdots$ は正．*(*特に，$\mathcal{K}_{res} = \mathcal{K}_{\vec{x}_c}$ *.)*

(ii) $\vec{x}_c$ は *SAFP*，即ち *(FP1) – (FP4)* を満たす．

(iii) Restricted model の臨界点 $\beta_{c,res}$ が存在する．(即ち，*(CS2), (DA1) – (DA2)* が成り立つ．)

最初に述べた一般論から，4SG 上の restricted SAP の漸近的性質について以下を得る．

Theorem 13 *(i)* 原点から出発する長さ k の *restricted SAP* の本数 $N_{res}(k) = N_{\mathcal{K}_{res}}(k)$ は

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log N_{res}(k) = \beta_{res}$$

を満たす．

(ii) Restricted model の *mean square displacement* の指数は，次の意味で

$$d_w = \frac{\log \lambda}{\log w} = 1.6657696\cdots$$

である．即ち，

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\log k} \log E_{res,k}[|w(k)|^{s\,d_w}] = s, \quad s \geqq 0.$$

ここで $E_{res,k}$ は原点から出発する長さ k の *restricted SAP* の上の一様分布（各 *path* に $1/N(k)$ の確率を *assign* したもの）に関する期待値である．

参考文献

[1] T. Hara, G. Slade, *Self-avoiding walk in five or more dimensions, I, the critical behaviour,* Commun. Math. Phys. **147** (1992) 101–136.

[2] T. Hara, G. Slade, *The self-avoiding-walk and percolation critical points in high dimensions,* Combinatrics, Probability and Computing **4** (1995) 197–215.

[3] K. Hattori, T. Hattori, *Self-avoiding process on the Sierpiński gasket,* Probab. Theor. Relat. Fields **88** (1991) 405–428.

[4] K. Hattori, T. Hattori, S. Kusuoka, *Self-avoiding paths on the pre-Sierpiński gasket,* Probab. Theor. Relat. Fields **84** (1990) 1–26.

[5] K. Hattori, T. Hattori, S. Kusuoka, *Self-avoiding paths on the three dimensional Sierpiński gasket,* Publications of RIMS **29** (1993) 455–509.

[6] T. Hattori, S. Kusuoka, *The exponent for mean square displacement of self-avoiding random walk on Sierpiński gasket,* Probab. Theor. Relat. Fields **93** (1992) 273–284.

[7] T. Hattori, T. Tsuda, *Asymptotic properties of self-avoiding paths on d-dimensional Sierpiński Gasket from renormalization group analysis,* preprint (2001).

[8] 服部哲弥,「数理物理学」講義録，2001,
`http://www.math.nagoya-u.ac.jp/～hattori`.