pre-history of processes on fractals

1985/4/n a seminar talk by T.H.

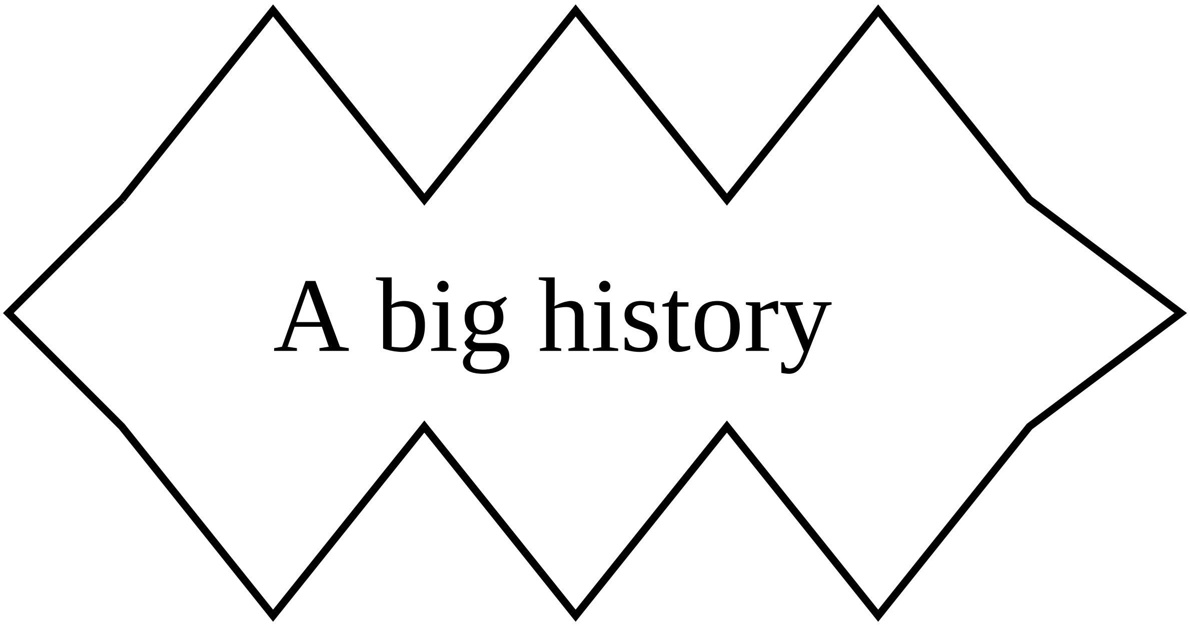
Gaussian field on fractals and renormalization group

Among the audience was a brilliant person from mathematics ...

1985/4/n+7 a seminar talk by S. Kusuoka

Construction of a Markov process on Sierpinski gasket

renormalization group for generating function of path length



meanwhile, a small side story went on ...

1988-1992 Hattori-Hattori-Kusuoka   self-avoiding paths on 2 and 3 dim gasket

1992-1996 Hattori-Hattori-Watanabe asymptotically one dim diffusions on gaskets
        Barlow-HHW restoration of isotropy on Sierpinski carpet

1999-2000 Hambly-Hattori-Hattori self-repelling process on Sierpinski gasket

フラクタル上の確率過程における
くりこみ群の視点

日本数学会 2001.10.03

服 部 哲 弥 (名大 多元数理)

−1．序．

○ くりこみ群：確率連鎖の連続極限，漸近的性質に対応する力学系

• 昔からあった考え方

1 次元 Brown 運動の F. Knight の構成 (1962) §0

~~◦ 既存の確率過程の再構成~~

~~◦ 自己相似拡散→固定点直上 (自明な軌道)~~

~~cf. フラクタル上の拡散，パーコレーション~~

~~◦ 固定点直上 (自明な軌道)~~

- 何を付け加えるか？
  - ◦ 適用範囲の拡大: 新しい確率過程，新しい現象
  - 今までなかった確率過程

$\mathbb{R}$ 上の Brown 運動と self avoiding process を連続的に内挿する self-repelling process の構成 **§1**

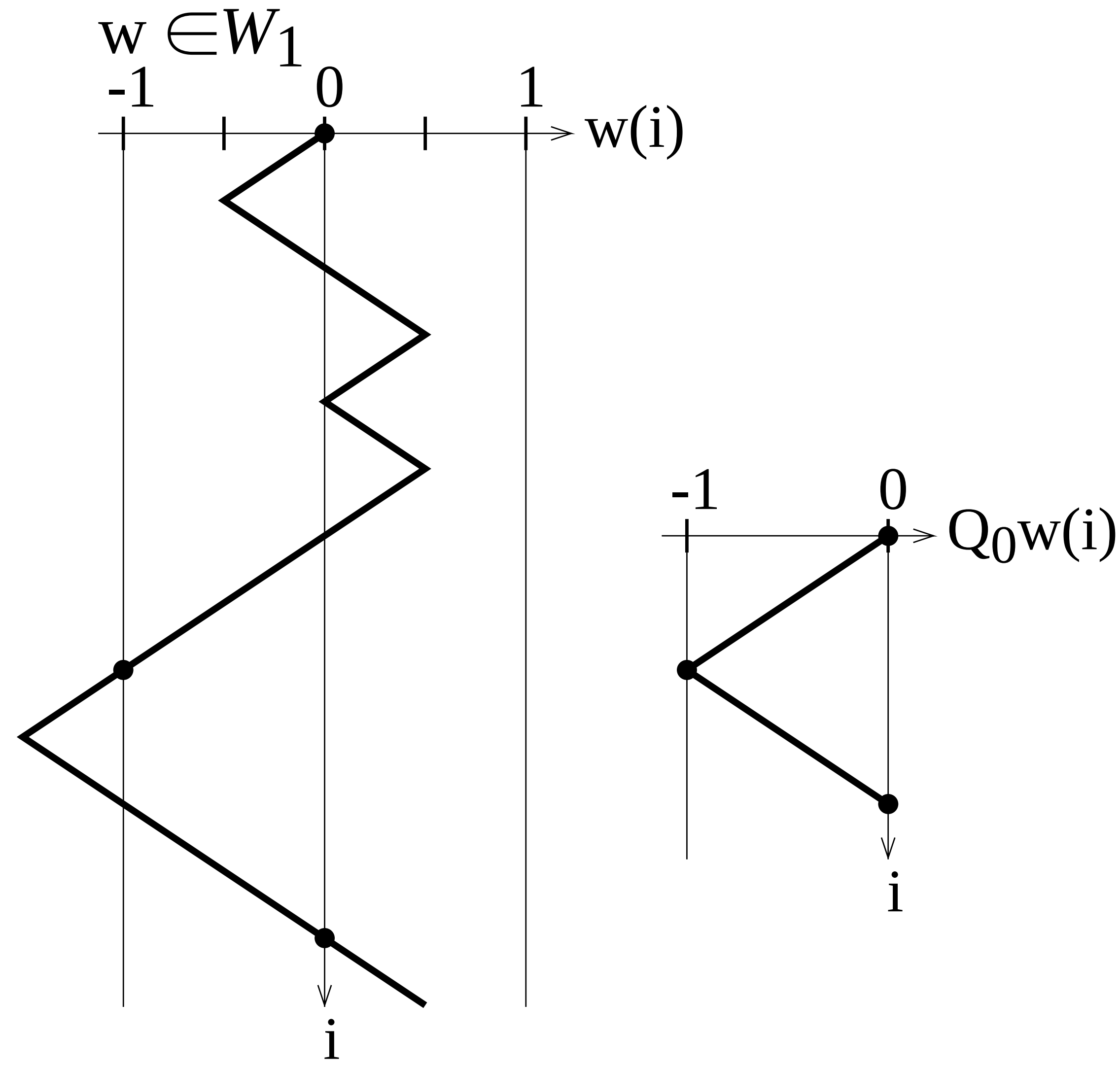
- $\mathbb{R}^d$ になかった現象

Sirpiński gasket 上の漸近一次元拡散の構成，Sierpiński gasket と Sierpiński carpet における非等方拡散の等方性の回復 **§3**

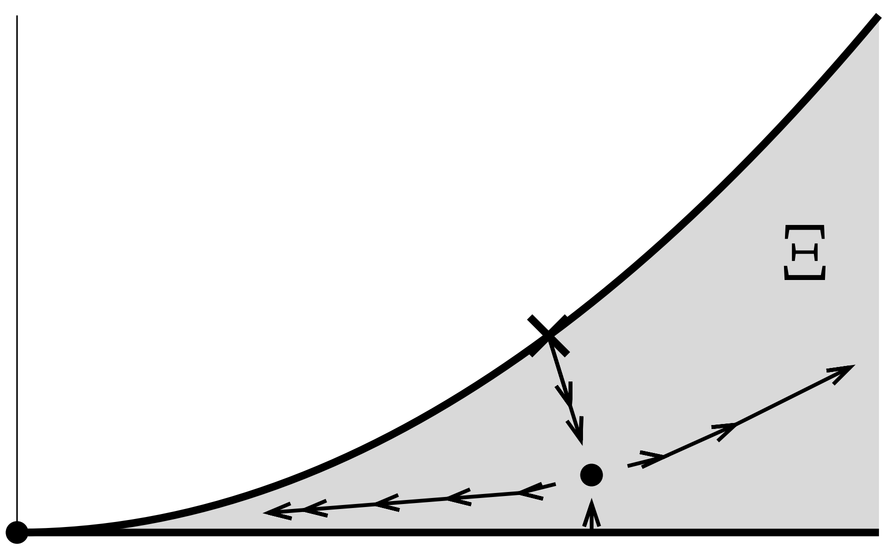
- ◦ くりこみ群力学系の大局的な軌道の追跡

d 次元 gasket 上の self-avoiding walk の漸近的性質 **§2**

漸近一次元拡散・等方性の回復 **§3**



w ∈W1
-1
0
1
w(i)
i
-1
0
Q0w(i)
i



Ξ

○著しく異なる確率過程

⇔ **共通の視点：くりこみ群力学系の軌道解析**

くりこみ群の (不十分な) 定義：無限自由度系の解析の一手段であって以下の性質を持つもの

(i) 距離空間に値を取る確率過程 (path 上の測度) の距離空間の**「スケール変換」**に対応する変化 (測度空間の上の力学系) を適切なパラメータ空間上の力学系として表現すること.

(ii) 追跡すべき軌道が**大局的**に素直なこと.
測度の(?) 正値性が軌道の素直さをimply

(iii) 軌道の固定点への収束または固定点近傍の線型化が確率過程の漸近的性質を与えること.

講演の目標: **くりこみ群の理念を具体的結果を通して**

０．1 次元 random walk のくりこみ群．

1 次元**S**imple **R**andom **W**alk の概収束極限による

Brown 運動の構成 (F. B. Knight)

$G_n = 2^{-n}\mathbb{Z}$. G_n 上の path の集合 $\mathcal{W}_n$ 次図を見ながら

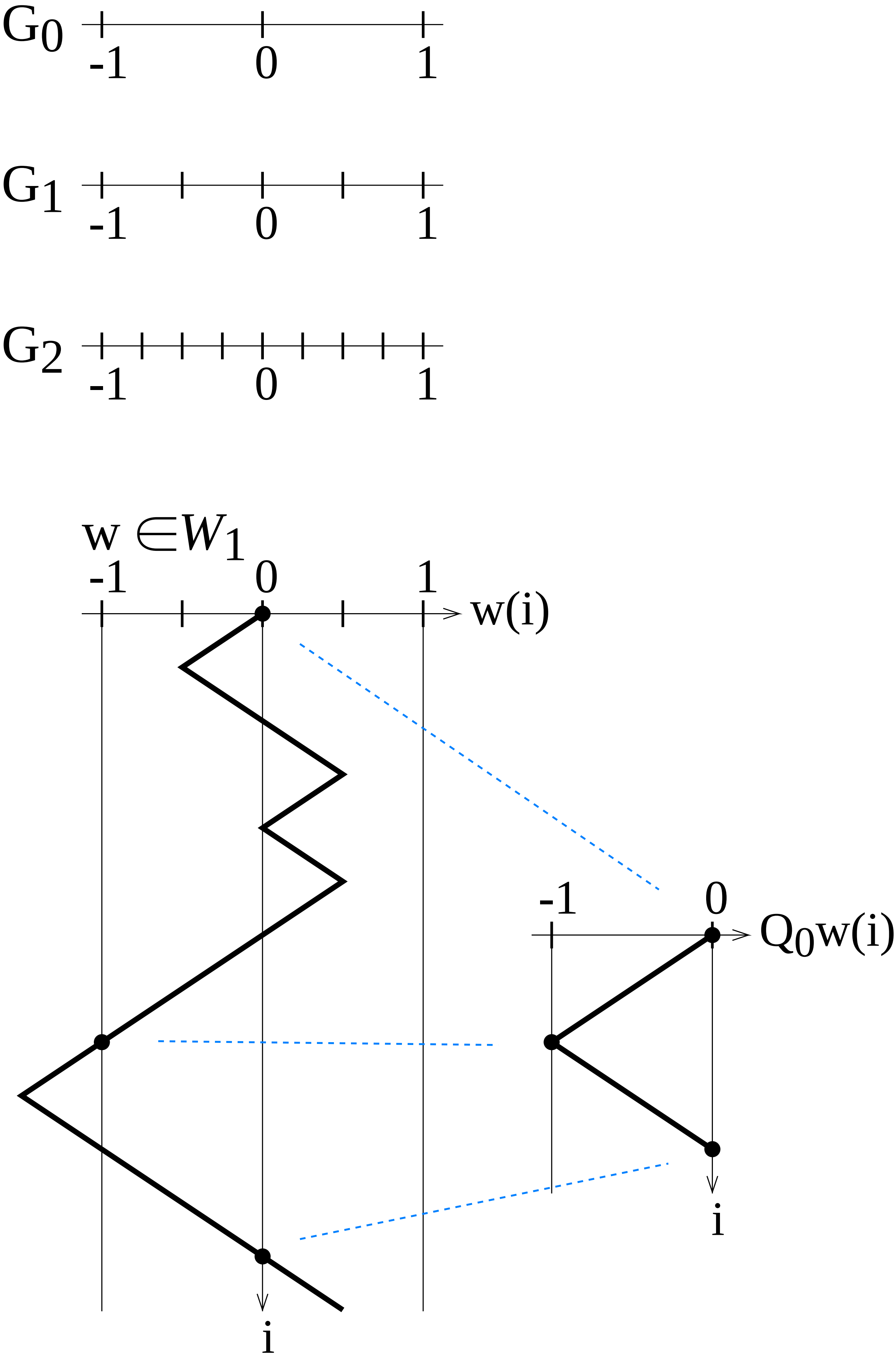
$$\mathcal{W}_n = \{w : \mathbb{Z}_+ \to G_n \mid w(0) = 0,\ |w(i) - w(i+1)| = 2^{-n}\}$$

Decimation. $Q_n:\ \mathcal{W}_{n+1} \to \mathcal{W}_n$ 「スケール変換」

$$(Q_n w)(j) = w(T_{n,j}(w)), \quad j \in \mathbb{Z}_+;$$

$T_{n,i}$ (G_n の hitting times)： $T_{n,0}(w) = 0$,

$$T_{n,i+1}(w) = \inf\{j > T_{n,i}(w) \mid w(j) \in G_n \setminus \{w(T_{n,i}(w))\}\}$$



G0
-1
0
1
G1
-1
0
1
G2
-1
0
1
w ∈ W1
-1
0
1
w(i)
i
-1
0
Q0w(i)
i

P_n: $\mathcal{W}_n$ 上の「一様分布」($P_n[k$ 歩指定$] = 2^{-k}$) $\Leftrightarrow$ SRW

左右対称性
$T<\infty$

$$P_{n+1} \circ Q_n^{-1} = P_n \tag{1}$$

~~粗くみた path が元の path と同じ分布「統計的自己相似性」　(固定点直上理論)~~

連続極限 $n \to \infty$：decimation Q_n の逆 ($w \in \mathcal{W}_n$ の各 1 歩に細かい構造を追加)

さっきの図を逆に見る

$\boxed{\text{「細かい構造」}}$：$\tilde{\mathcal{W}}_1$ ($G_1 = 2^{-1}\mathbb{Z}$ 上の path で，$0 \to 1$ で -1 を通らないもの) と相似

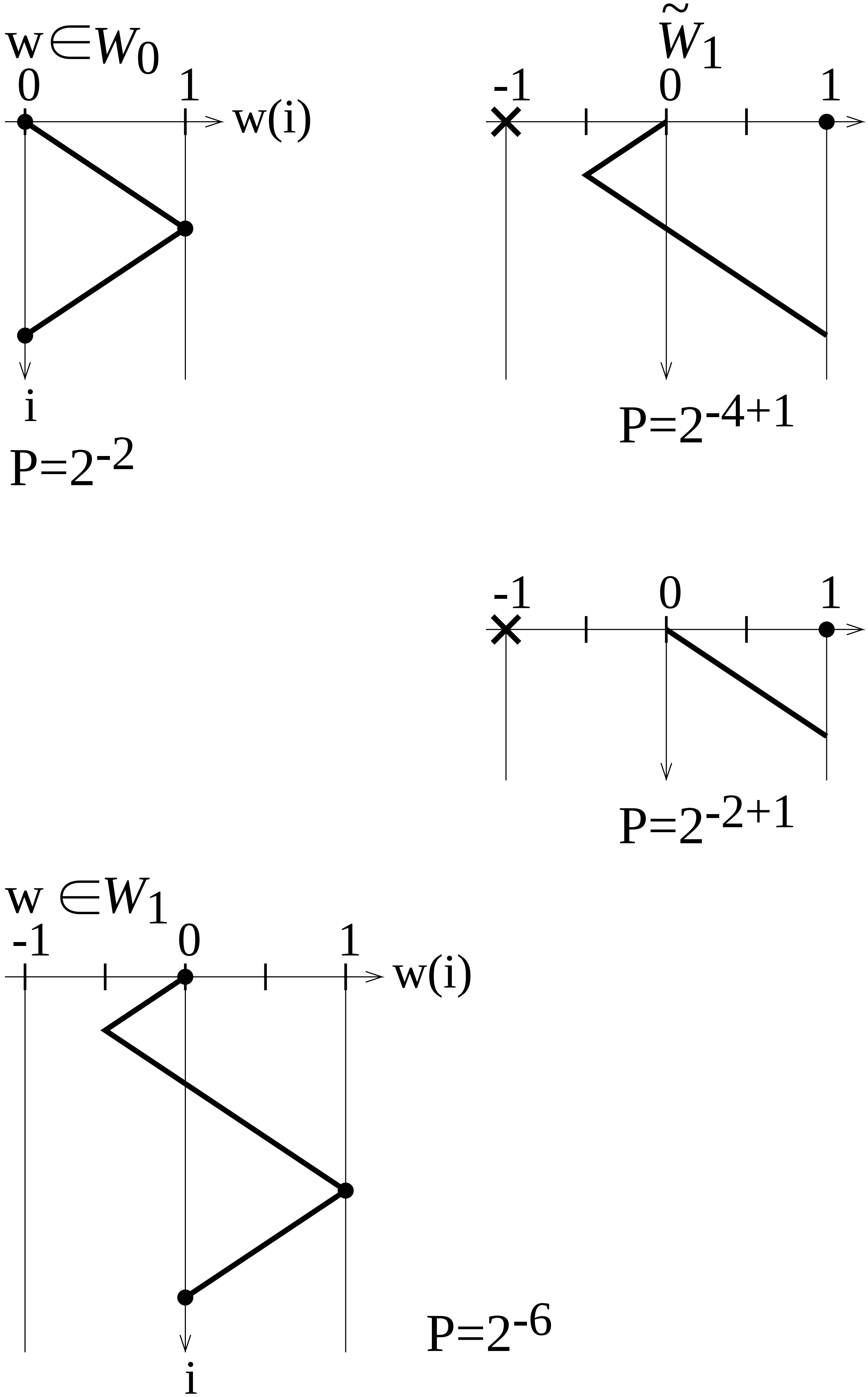
Knight's construction：(1) を整合条件とする extension

$Y_n(\cdot)$： $(\mathcal{W}_n, P_n)$ への projection

$\to Y_n(4^n \cdot)$ が概収束

~~「4^n」：分枝過程 $T_{k,i}(Y_n)$, $n = k, k+1, \cdots,$ の平均個数~~

- 以上をくりこみ群で見直す


$w \in W_0$
0
1
w(i)
i
$P=2^{-2}$
$\tilde{W}_1$
-1
0
1
$P=2^{-4+1}$
-1
0
1
$P=2^{-2+1}$
$w \in W_1$
-1
0
1
w(i)
i
$P=2^{-6}$

○ くりこみ群

$\tilde{\mathcal{W}}_n$: G_n 上の path で， $0 \to 1$ で -1 を通らないもの

$\boxed{\tilde{\mathcal{W}}_n \text{ における } L = T_{0,1} \text{ (総歩数) の母関数}}$

$$\Phi_n(z) = \sum_{w \in \tilde{\mathcal{W}}_n} z^{L(w)} \qquad (\text{係数 } 1 \Leftrightarrow \text{SRW})$$

$$\Phi_1(z) = \frac{z^2}{1-2z^2} \tag{2}$$

命題 1

$$\Phi_{n+1}(z) = \Phi_1(\Phi_n(z)) \tag{3}$$

$\longleftrightarrow$ decimation

◇

命題 2 $\dfrac{1}{x_c}\Phi_n(e^{-\lambda^{-n}s}x_c) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-s\xi}\tilde{P}_n(d\xi)$ なる $\tilde{P}_n$ が $n \to \infty$ で弱収束する. ◇

- $\boxed{\text{くりこみ群}}$: 命題 1 によって Φ_1 が定義する力学系

  (A) 力学系があれば，対応して確率過程が作れる

  (B) 無限に細かいギザギザ $\to$ スケール n 方向のマルコフ性

- Φ_1 の固定点 $x_c = 1/2 \to$ 確率の保存

- $\lambda = \Phi_1'(x_c) = 4 \to$ 歩数分布の収束

○「確率過程におけるくりこみ群」自体は新しいことではないが,「置き去り」にされてきた？理由？

- Decimation は今のところ finitely ramified fractal のみ (○ 1 次元, × d 次元)

  cf. Sierpiński carpet 上の拡散

- Markov 性 → Dirichlet form 等強力な解析的方法

- 自己相似確率過程の構成：固定点の直上という自明な軌道

○ 何を付け加えたいか？

- 適用範囲の拡大：新しい process, 新しい現象.

- 大局的な軌道の追跡

1． $\mathbb{R}$ 上の self-repelling process．

Self **A**voiding **W**alk：過去に通った点は通らない，

という条件を付けた path (の集合上の測度)

SRW (Markov 性) の反対の極端

$\mathbb{Z}$ 上の SAW は容易 (左/右への等速度直線運動)

○重要な性質「path のギザギザの度合い」

$|X_n| \approx n^\gamma$, $n \to \infty$, と書けるときの γ

$1/\gamma$: walk (path) dimension, mean square displacement

$\mathrm{E}[\ |X_n|^2\ ] \approx n^{2\gamma}$

連続極限 $\lim_{\epsilon\downarrow 0} \epsilon^\gamma X_{[t/\epsilon]}$ が自明でない連続確率過程になるための指数 γ,

path の Haussdorff 次元,　Hölder 連続性の modulus,

1 次元 ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$)

SRW (B.m.)： $\gamma = 1/2$,　　等速度直線運動： $\gamma = 1$

○両者を内挿する walk (process) の族

これまでの提唱： γ 不連続

C： $0 \to 1$ ($t = 0 \ \to \ \infty$), 連続関数 $[0, \infty) \to \mathbb{R}$

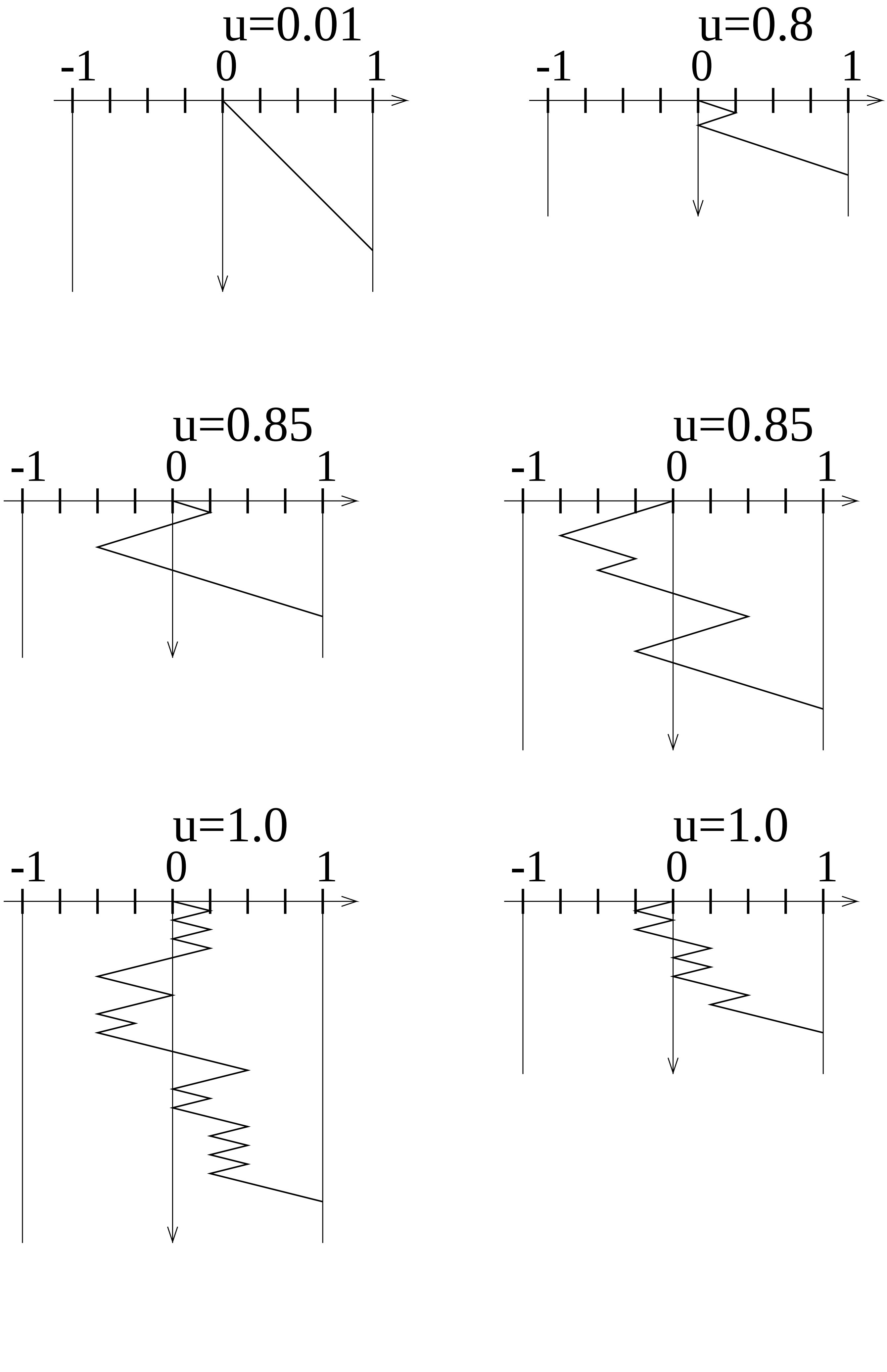
定理 3 (HHH '01) $\exists\, C$ 上の確率測度の族 P_u, $u \in [0,1]$;

(i) $u = 1$*:* 1 次元ブラウン運動で $0 \to 1$ *(*吸収*)*, かつ -1 を *hit* しないもの

(ii) $u = 0$*:* 等速直線運動 $0 \to 1$

(iii) P_u は u について連続 *(*弱収束で*)*

(iv) $\exists\, 0 < \gamma_u \leqq 1$, 連続*;* $|w(t)| \sim t^{\gamma_u}$ *(*P_u*)* $\diamond$


u=0.01
-1
0
1
u=0.8
-1
0
1
u=0.85
-1
0
1
u=0.85
-1
0
1
u=1.0
-1
0
1
u=1.0
-1
0
1

証明：具体的に作る．歩幅 2^{-n} の paths $\tilde{\mathcal{W}}_n$

SRW の歩数の母関数 $\Phi_{1,n} = \Phi_n$

$$\Phi_{1,1}(z) = \frac{z^2}{1-2z^2} \tag{2}$$

$$\Phi_{1,n+1}(z) = \Phi_{1,n}(\Phi_{1,1}(z)) \tag{3}$$

SAW の歩数の母関数 $\Phi_{0,n}$ (等速度運動 $0 \to 1$)

$$\Phi_{0,1}(z) = z^2$$

$$\Phi_{0,n+1}(z) = \Phi_{0,1}(\Phi_{0,n}(z))$$

両者の内挿は容易！

$$\Phi_{u,1}(z) = \frac{z^2}{1-2u^2z^2}, \quad 0 \leqq u \leqq 1.$$

$$\Phi_{u,n+1}(z) = \Phi_{u,1}(\Phi_{u,n}(z)) \tag{4}$$

あとは Knight と概ね同様．証明終わり．

$$\gamma_u = \frac{\log 2}{\log \lambda_u}, \; \lambda_u = \Phi'_{u,1}(x_{c,u}), \; x_{c,u} = \Phi_{u,1}(x_{c,u})$$

○誰も見つけられなかった確率過程の族を発見

← くりこみ群 (4) を第一原理として守ったこと

2．Sierpiński gasket 上の self-avoiding walk．

$O=(0,0)$, $a=(1,0)$, $b=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$,

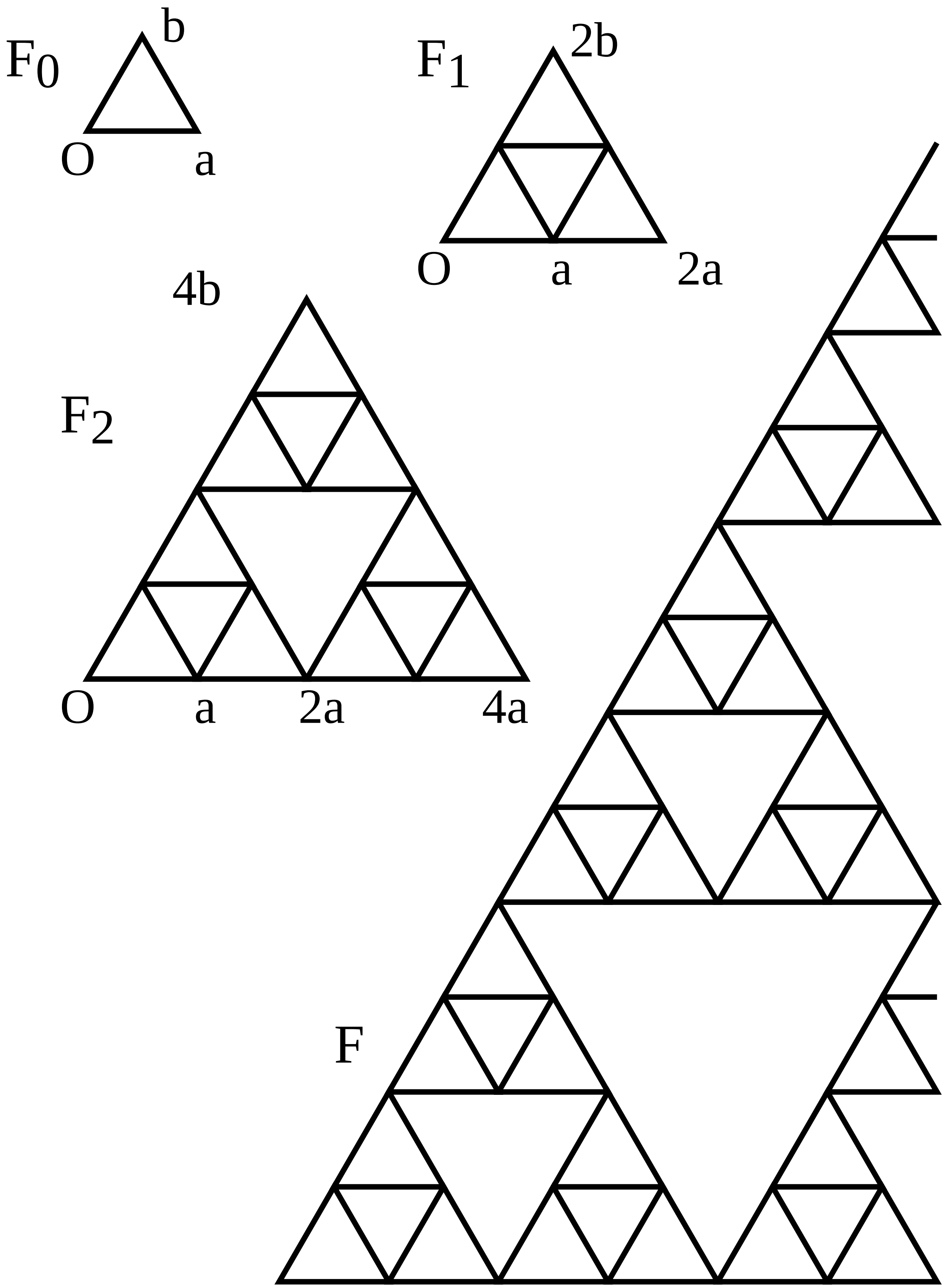
有限 pre-**S**ierpiński **G**asket F_n: $F_0=\triangle Oab$

$$F_{n+1}=F_n\cup(F_n+2^n a)\cup(F_n+2^n b),\quad n=0,1,2,\cdots,$$

pre-SG: $F=\bigcup_{n=0}^{\infty}F_n$

SG: $\bigcup_{n=0}^{\infty}2^{-n}F_n$ の閉包

定理 3 (self-repelling process の構成) は**SG** 上でも可能


F0
b
O
a
F1
2b
O
a
2a
F2
4b
O
a
2a
4a
F

○そもそも SAW が容易でない (non-Markov) が, (SG では) くりこみ群は適用可能

連続極限 (定理 3) $\Leftrightarrow$ walk の歩数が大きいときの漸近的性質

- ~~自己相似拡散の構成：くりこみ群の固定点とその近傍~~
- ~~漸近的性質：SAW では大局的な軌道解析が必要~~

G: pre-SG F の単位 $\triangle$ の頂点

$W^{(0)}$: $w:\ \mathbb{Z}_+ \to G$, SAW, w(0)=0, $\overline{w(i)w(i+1)}$ が F の edge

P_k: $w \in W^{(0)}$ で総歩数 $L(w) = k$ のものの上の一様分布

定理 4 $\exists \gamma > 1;\ \lim_{k\to\infty} (\log k)^{-1} \log \mathrm{E}_{P_k}[\ |w(k)|^{s\gamma}\ ] = s,\ s \in \mathbb{R}$ *(mean square displacement* の指数が γ*)* $\diamond$

w(k) ~ k^{1/γ}

- **d** 次元 pre-**SG**: 2SG (HHK '90), 3SG (HHK '93), 4SG 上の restricted model (HT '01)

- dSG 上の SAW のくりこみ群の主要部は $[d/2]$ 次元空間上の力学系

  $$\gamma = \frac{\log 2}{\log \lambda}$$

  λ: くりこみ群のある不変領域の中の唯一の固定点におけるヤコビ行列の最大固有値

- $\gamma > 1 \iff$ 無限に細かい「ギザギザ」

  くりこみ群のヤコビ行列の最大固有値として自然にとらえられる

  ~~くりこみ群:「スケール変換」(細かい構造「ギザギザ」の付加平滑) に対する系の応答~~

くりこみ群の軌道 ― 2SG 上の SAW の場合.

$W_{n,1} = \{w : O \to 2^n a \mid \text{SAW in } F_n,\ \times\ 2^n b\}$

$W_{n,2} = \{w : O \to 2^n a \mid \text{SAW in } F_n,\ \bigcirc\ 2^n b\}$

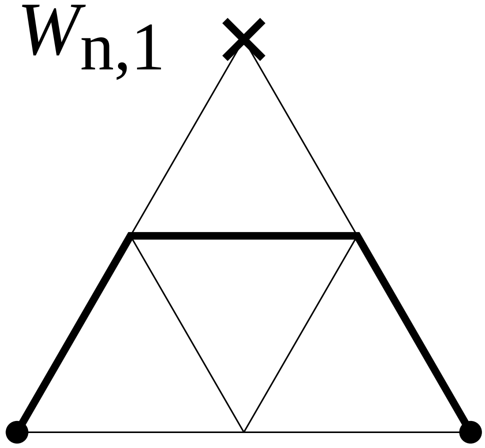
$\triangle$ の通り方 2 通り (1 歩または 2 歩)

$s_i(w)$: i 歩で通り抜ける $\triangle$ の個数 $(i = 1, 2)$

結合母関数

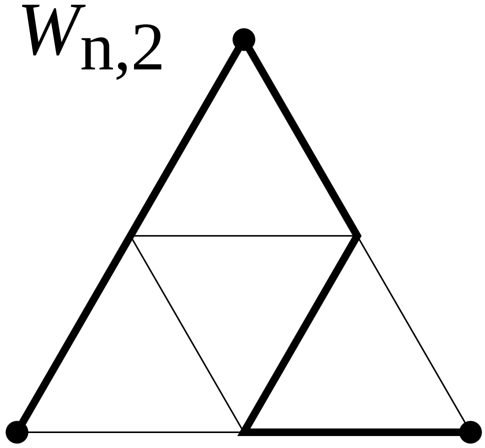
$$\vec{\Phi}_n = (\Phi_{n,1}, \Phi_{n,2});\ \ \Phi_{n,i}(x, y) = \sum_{w \in W_{n,i}} x^{s_1(w)} y^{s_2(w)}$$

$W_{n,1}$



$S_1=3$
$S_2=0$

$W_{n,2}$



$S_1=1$
$S_2=2$

$$\Phi_{n,i}(x,y)=\sum_{x\in W_{n,i}} x^{s_1(w)}y^{s_2(w)} \qquad i=1,2$$

$$\vec{x}_n=(\Phi_{n,1}(x,y),\Phi_{n,2}(x,y))$$

renormalization group

$$\vec{x}_{n+1}=(\Phi_{1,1}(\vec{x}_n),\Phi_{1,2}(\vec{x}_n))$$

$$\vec{x}_0=(x,y),\ \vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \ldots$$

くりこみ群（F_{n+1} は F_n で $\triangle \to F_1$ として２倍拡大したもの）

$$\vec{\Phi}_n(\vec{z}) = \vec{\Phi}_1(\vec{\Phi}_{n-1}(\vec{z}))$$

$$\vec{\Phi}_1(x,y) = ((x+y)^2 + x^2(x+2y), (x+2y)xy)$$

SAW の漸近的性質：$\vec{\Phi}_1$ の固定点 $\vec{x}_c = (\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1), 0)$

総歩数 $L = s_1 + 2s_2$ の分布：母関数 $\vec{\Phi}_n(x, x^2) \to y = x^2$ (canonical surface)

Canonical surface から固定点 $\vec{x}_c$ に向かう大局的な軌道解析

このSAWの漸近的性質とくりこみ群の性質の関係を以下もう少し説明したい．

○ dSG 上の SAW の漸近的性質を保証するくりこみ群の軌道の性質

$\vec{x}_c$ が**S**elf-**A**voiding **F**ixed **P**oint とは：

(FP1) $\vec{\Phi}(\vec{x}_c) = \vec{x}_c$

(FP2) $\vec{\Phi}$ の Jacobi 行列 $\mathcal{J}$ について，$\mathcal{J}(\vec{x}_c)$ は対角化可能，最大固有値 $\lambda > 1$，｜その他｜< 1

λ に対応する左固有ベクトル $\vec{v}_L$ は全成分正

右固有ベクトルについて $v_{R,(1)} > 0$

(FP3) $x_{c,I} \neq 0$ ならば， Φ_I に「$m_{(1)} > 0, \quad x_{c,J} = 0 \to m_J = 0$」なる項 $\displaystyle\prod_{J \in \mathcal{I}_d} {x_J}^{m_J}$ がある

(FP4) $\vec{x}_c \in \Xi_d \setminus \{\vec{0}\}$ 次図参照

$\beta_c \in \mathbb{R}$ が**臨界点**とは $\vec{x}_{can}(\beta_c) = (e^{-\beta_c|I|}, \ I \in \mathcal{I}_d)$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \vec{\Phi}_n(\vec{x}_{can}(\beta_c)) = \vec{x}_c$ となる SAFP $\vec{x}_c$ が存在すること

- β_c, λ はくりこみ群だけで決まる

$W^{(0)}$：原点 O から出発する SAW の集合

$N(k)$： O から出発する歩数 k の SAW の本数

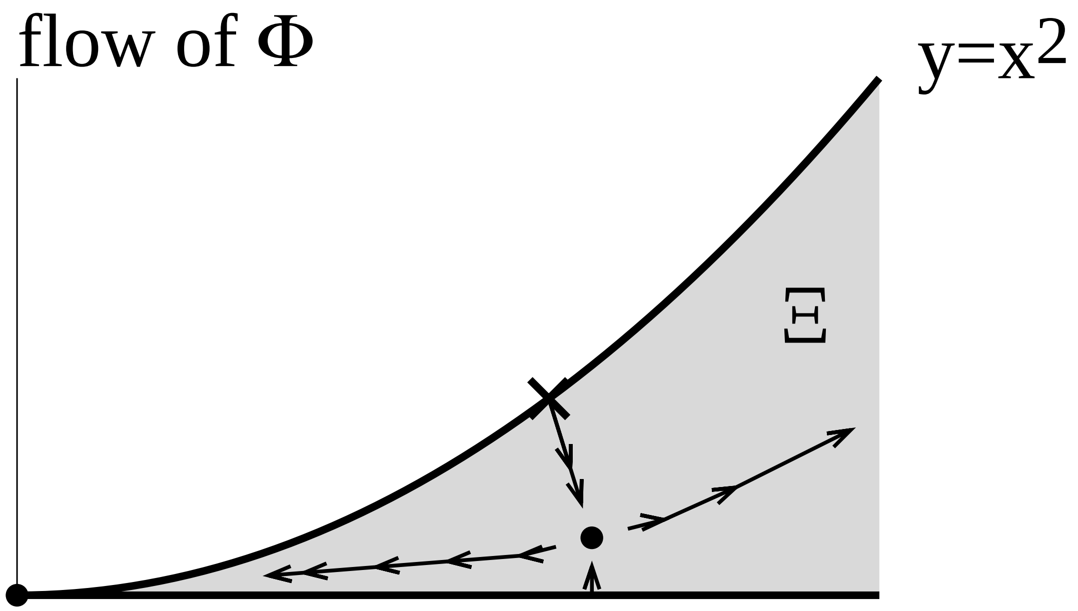
$\tilde{P}_k$：原点 O から出発する歩数 k の SAW の集合上の一様分布（E_k： 期待値）

定理 5 (Hattori–Tsuda '01) 臨界点 $\beta_c \in \mathbb{R}$ が存在すれば

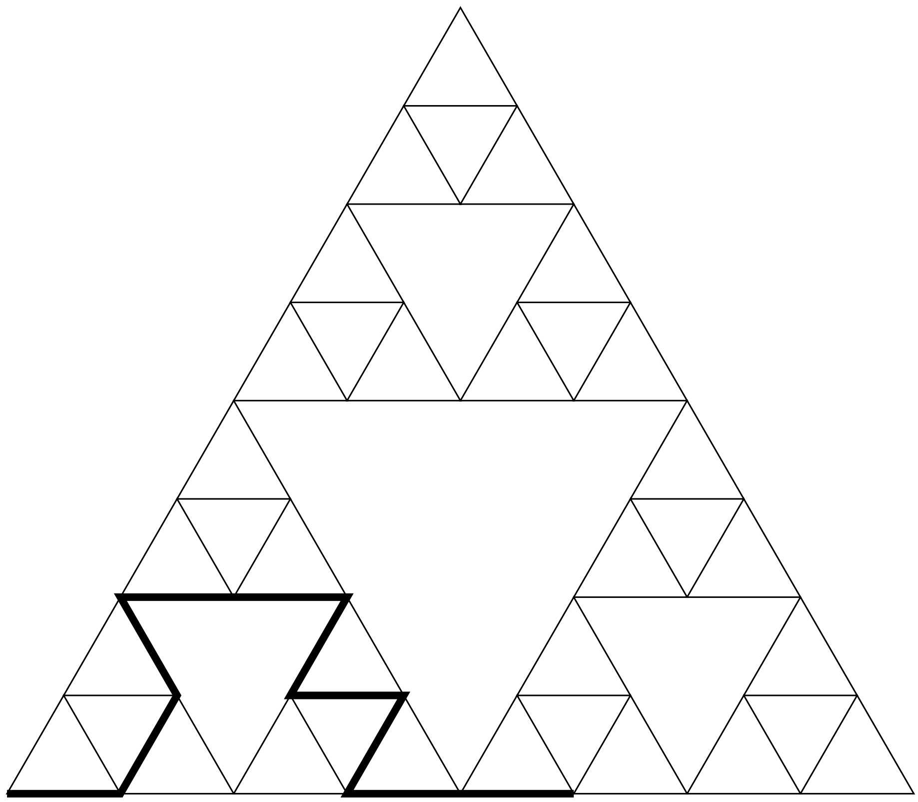
$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log N(k) = \beta_c$$
$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\log k} \log E_k[|w(k)|^s] = s\gamma,\ \ s \geqq 0 \ (\gamma = \frac{\log 2}{\log \lambda})$$

◇

- くりこみ群が SAW の漸近的性質を決める



In general, for dSG,
if this global flow structure holds true, then



$$|w(k)| \quad k^{\gamma} \qquad\qquad \gamma = \frac{\log 2}{\log \lambda}$$

くりこみ群の大局的軌道解析と，walk の漸近的性質への翻訳の 2 つに分離，後者は解決

くりこみ群の軌道解析が SAW の難しさの本質 (含む次元依存性)

○他の手段が使えない対象へのくりこみ群への適用

○くりこみ群 (力学系) の大局的な軌道解析の重要性

○力学系 (くりこみ群) が確率過程を定める

３．フラクタル上の非等方拡散の等方性の回復．

○拡散過程におけるくりこみ群の大局的軌道解析の例

連続極限：漸近一次元拡散の存在

漸近的性質：非等方拡散の等方性の回復

フラクタル上の拡散

- Markov 性 (Dirichlet form など)
- Infinitely ramified fractal (**S**ierpiński **C**arpet)

  (e.g. 存在だけなら軌道の sharp な追跡は不要)
- 固定点直上理論（nested fractal: 非退化性，一意性：くりこみ群の自明な「軌道」に対応する連続極限

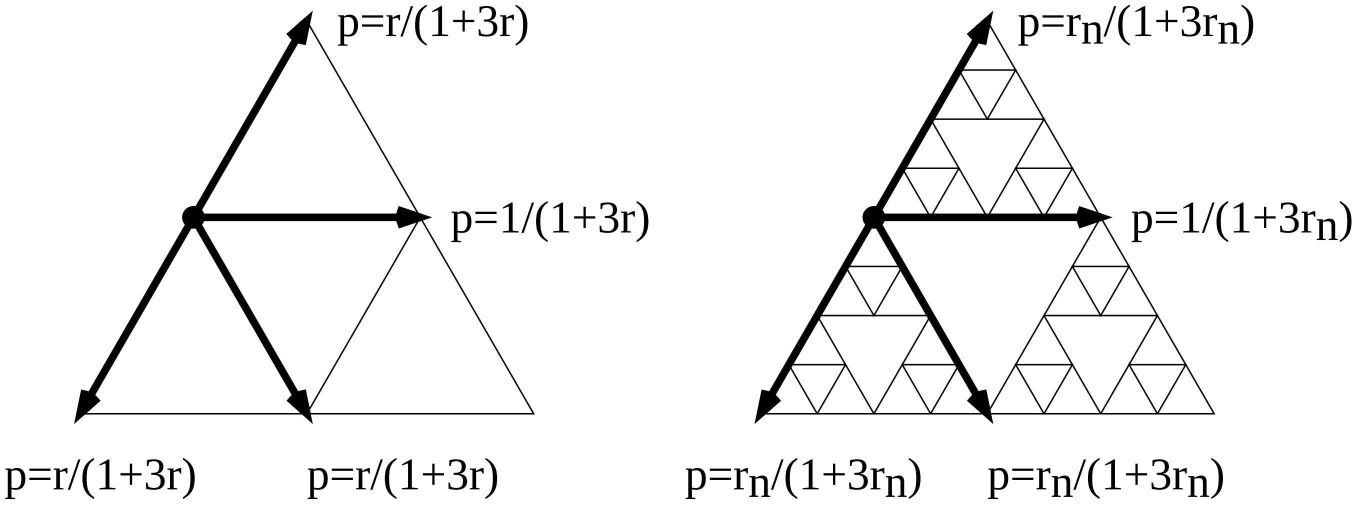
○漸近一次元拡散 (HHW93)：不安定な固定点に基づく (自己非相似) 拡散

自己非相似 $\Leftrightarrow$ くりこみ群の自明でない軌道

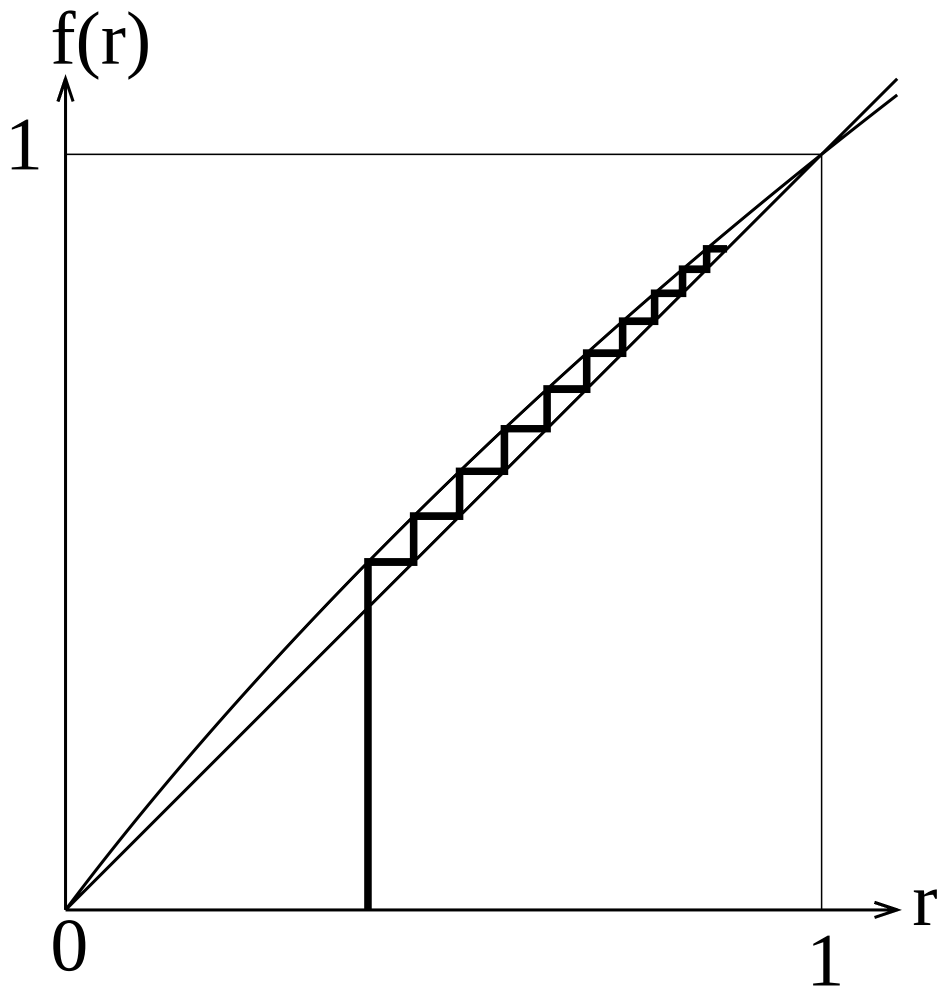
pre-SG 上の非等方 RW で，斜め方向への遷移確率が水平方向の r 倍

$$r_n = \frac{P[2^n b \text{ を先に hit}]}{P[2^n a \text{ を先に hit}]}$$

$$r_{n+1} = f(r_n), \quad f(r) = \frac{4r + 6r^2}{3 + 6r + r^2} \qquad (r_0 = r)$$


p=r/(1+3r)
p=1/(1+3r)
p=r/(1+3r)
p=r/(1+3r)
p=rn/(1+3rn)
p=1/(1+3rn)
p=rn/(1+3rn)
p=rn/(1+3rn)

$$r_{n+1}=f(r_n)$$

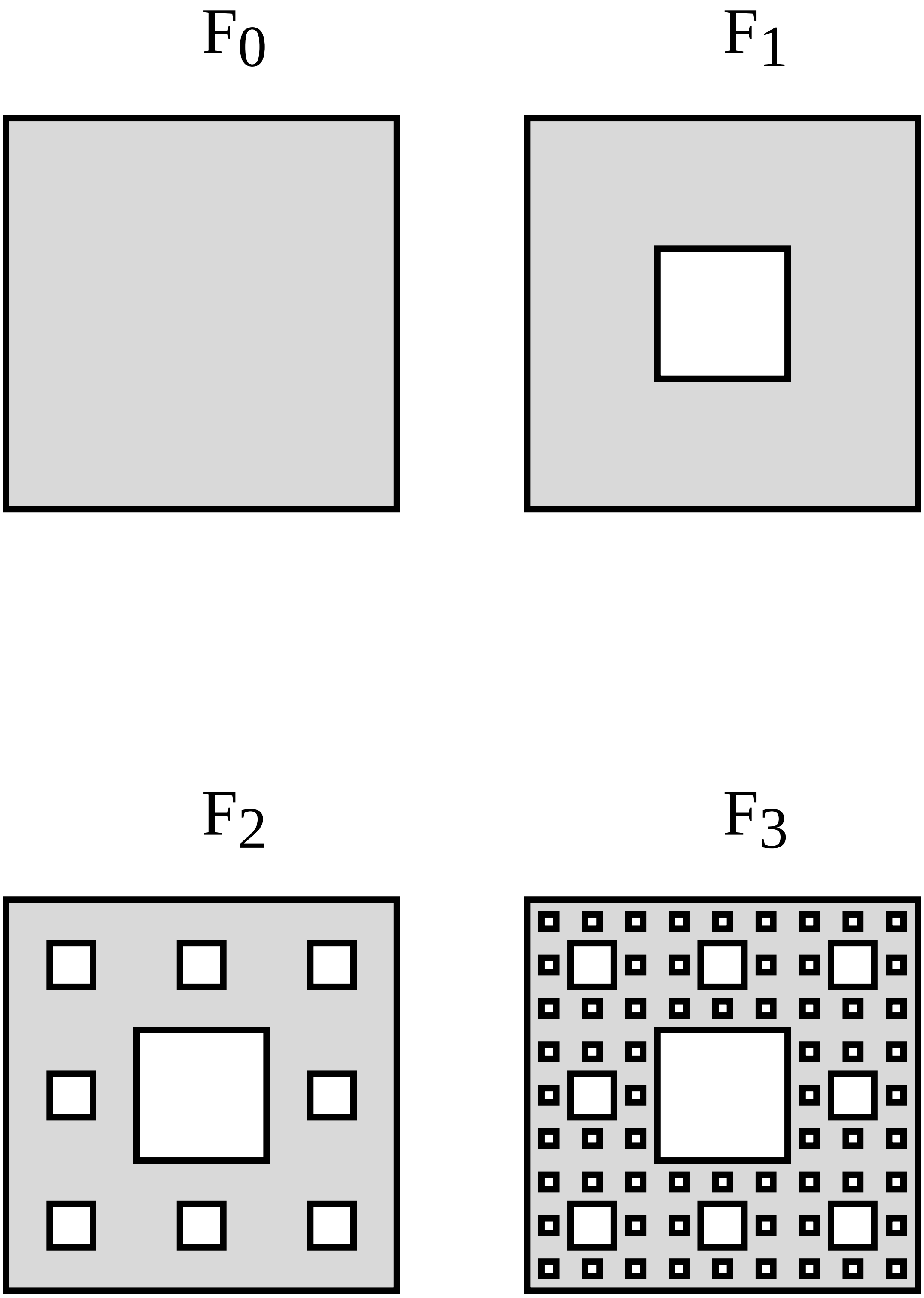

f(r)
1
0
1
r

f の非負固定点: 0 (1 次元 SRW), 1 (等方的 SRW)

$$r_0 > 0 \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} r_n = 1$$：等方性の回復

$$\exists r_n = O((3/4)^{-n}) \ (n \to -\infty)$$：漸近一次元拡散

○発見の本質：くりこみ群を調べたこと


F_0
F_1
F_2
F_3

○ Infinitely ramified fractal (**S**ierpiński **C**arpet)

pre-SC F_n の形の電気抵抗板

非等方性 (x 方向の抵抗率 1，y 方向の抵抗率 r)

電位分布 $v(x, y)$

$$E_{F_n}(v) = \iint_{F_n} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \, dx\, dy$$

$R_n^y(r)$: F_n の $y = 0$ と $y = 1$ の間に電圧をかけたときに観測される抵抗

$$\frac{1}{R_n^y(r)} = \inf\left\{E_{F_n}(v) \mid v(x, 0) = 1,\ v(x, 1) = 0\right\}$$

$R_n^x(r)$: $x = 0$ と $x = 1$ の間に電圧をかけたときに観測される抵抗

巨視的な非対称性：$H_n(r) = \dfrac{R_n^y(r)}{R_n^x(r)}$

$$n = 0(\text{穴のあいていない板}) \ \Rightarrow\ v(x, y) = -x$$

$$\to \quad R_n^x(r) = 1,\, R_0^y(r) = r \quad \to \quad H_0(r) = r$$

定理 6 (BHHW '97) $r > 0$ が何であっても n が十分大きければ

$1/5000 < H_n(r) < 5000$

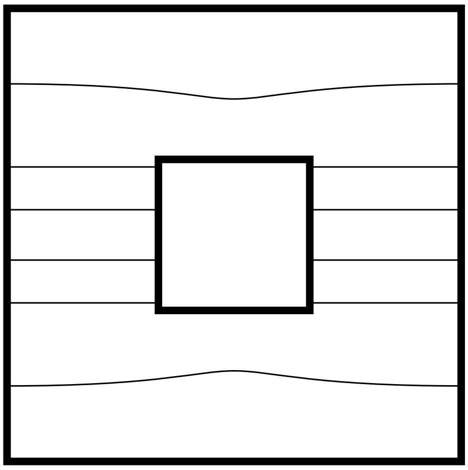
材質の非等方性がどんなに大きくても，フラクタルの細かい構造を入れればやがてその効果は消える

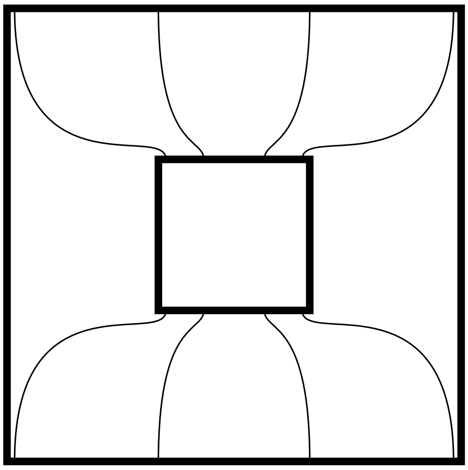
証明 (くりこみ群)：$H_n(r) \gg 1 \Rightarrow H_n(r) \approx c(7/9)^n$

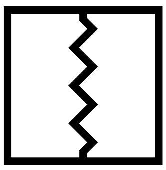
○新現象の発見 $\leftarrow$ くりこみ群の大局的な軌道解析

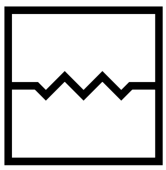
○ infinitely ramified fractal　（くりこみ群が無限次元）

R_y R_x

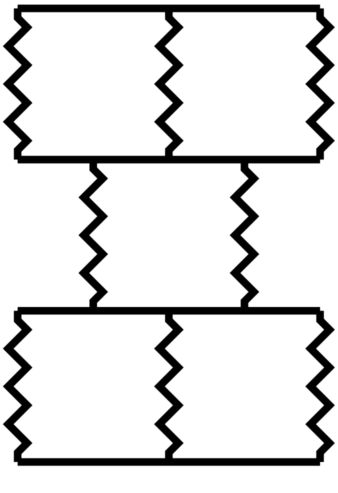


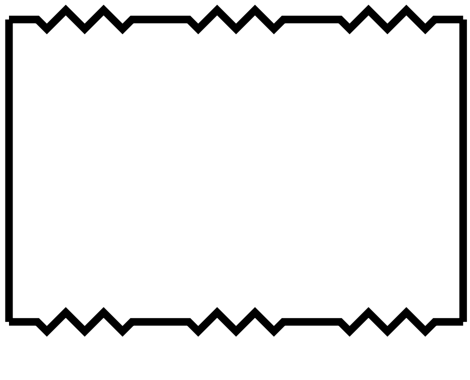






7/6 3/2





∞．まとめ．

確率過程を調べる手段としてのくりこみ群

「スケール変換」（細かいギザギザを付け加えること）に対する系の応答

- 適用範囲の拡大：新しい process，新しい現象．

  マルコフ vs 非マルコフ　は筋違い

  「良い対象」の新しい枠組みが必要

- 大局的な軌道の追跡

  canonical surface と固定点が離れている

  特徴的な新現象

☆期待：くりこみ群の軌道がすなおな不変部分集合があるに違いない

- 互いに著しく異なる多様な系を統一的に解析する手段（第一原理としてのくりこみ群）
  - 力学系が確率過程を定める
  - $\mathbb{Z}^d$, $\mathbb{R}^d$ へ (infinitely ramified fractal)
  - スピン系 (くりこみ群の発祥の地)

    Hierarchical Ising model の臨界軌道の存在

    (Hara–Hattori–Watanabe '01)

一見著しく異なる発見を一つの視点から導けるならば，そこに一つの数学的手段があることを期待させる．
くりこみ群は統計力学および場の量子論の理論物理学の分野で極めて多くの研究がなされた概念と計算手法を総称する用語である．しかし，くりこみ群なる解析手段の，満足な数学的定義はまだない，というのが講演者の認識である．

逆に言えば，ここに，これまで気づかれなかった何かがあるかもしれない．