投資関数

1　投資理論の問題

投資需要の問題は，生産が時間の経過の中で行われるということから生じる．再生産のための準備が必要であるほか，生産期間，耐用期間があるため，生産要素投入の時点と生産物産出の時点とが必ずしも一致しない．投入のときと産出のときを単位観察期間ごとに分けて，同一期間の生産のための投入を**経常投入**，将来期間の生産のための投入を**資本投入**という．投資需要は，資本投入のための需要である．

企業は，過去の生産活動の結果である歴史与件に制約されながら，将来に関する予想に導かれて投資需要を決定する．

2　代替の原理

2.1　投資需要の決定

生産物の量は，資本ストックと労働投入量の関数として定まる．その関係を，生産関数

$$y = f(k, l)$$

によって表すことが出来る．y は産出量，k，l はそれぞれ資本ストック，労働投入量である．生産は，比率に関する収穫逓減，規模に関する収穫不変の法則にしたがうものとする．

企業は，初期資本ストック k_0 を与件とし，来期の生産物需要が $\bar{y}$ であるとの見通しの下で，今期に z の投資を行う．投資支出とその収益の発生に１期間の隔たりがあることを考慮して利潤 π を評価すると，

$$\pi = \frac{\bar{y} - wl + (1-\delta)k}{1+r} - z, \quad k = k_0 + z$$

ここで r は期間１から期間２にかけての実質利子率，w は生産物単位の実質賃金率である．[1] z と l とはつぎの制約条件に服する．

$$f(k_0 + z, l) \geq \bar{y}$$

企業が利潤を最大化するように z を選ぶとしよう．利潤 π は

$$\frac{\bar{y} - [wl + (r+\delta)z] + (1-\delta)k_0}{1+r}$$

のように書き直されるから，企業の問題は

$$\min_{l,z}[wl + (r+\delta)z], \quad f(l, k_0 + z) \geq \bar{y}$$

であることが分かる．この最小化問題の意味を理解するために，これと同値の問題

$$\min_{l,z}[wl + (r+\delta)k], \quad f(l, k_0 + z) \geq \bar{y}$$

$$z = k - k_0$$

[1]ここでは生産物と投資財は同質と考えている．以下の理論を，両者が異質である場合に拡張するのは容易である．なお，この式の導出については，付録を見よ．

を考えよう．$r+\delta$ は資本用役価格であるから，この最小化問題は，結局，労働用役費用と資本用役費用の和としての生産費を最小化する問題である．したがって利潤を最大化する最適投資水準は，所与の生産目標を最小の費用で達成する資本ストックの水準と，初期資本ストックとの差として定まることになる．

所与の生産目標を達成するための費用が最小になるためには

$$\frac{f_k}{f_l}=\frac{r+\delta}{w},\quad f(k,l)=\bar{y}$$

つまり，資本の労働に対する限界代替率が，資本用役価格の労働用役価格に対する比に等しくなければならない．これは，Marshall の**代替の原理**[2] である．比率に関する収穫逓減の下では，この条件が成り立つとき，費用は最小となっている．費用が最小化され，したがって利潤が最大化されている状態を，**企業の均衡**と呼ぶ．

以上の考察から，企業が利潤最大化を目的として投資水準を定めるなら，投資需要は目標産出量と実質利子率，実質賃金率の関数として定まることが分かった．これらの要因の変化は，投資需要にどのような影響を与えるであろうか．まず実質利子率について見ると，実質利子率が高いほど投資需要は少ない．実質利子率の上昇が，労働用役価格に対して資本用役価格を相対的に高め，資本から労働への代替を誘発するからである．そのため最適資本ストック量は減り，投資需要は減る．また目標産出量 $\bar{y}$ の上昇は，必要資本ストック量を増大させ，投資需要を増やす．現在の産出量は目標産出量決定の重要な根拠であるから，現在の産出量が大きいほど投資需要は大きいと考えてよい．

2.2　所得分配への帰結

企業の利潤最大化条件から，所得分配の限界生産力命題が導かれる．まず，競争市場の均衡では収益率が均等化していなければならないから，

$$\frac{\bar{y}-wl-\delta k}{k}=1+r$$

したがって

$$\bar{y}=(r+\delta)k+wl$$

さらに生産関数の諸条件と企業の均衡条件を考慮すると

$$f_k=r+\delta,\quad f_l=w$$

すなわち，資本用役，労働用役の価格は，それぞれ資本，労働の限界生産力に等しい．[3]

3　さまざまな投資理論との関係

3.1　加速度原理

加速度原理とは，投資需要 z が，前期から今期にかけての産出量の増分に比例して定まるという仮説である．数式で示せば

$$z_t=v\Delta y_t,\quad \Delta y_t=y_t-y_{t-1}$$

[2]Marshall (1961), Book V, Chapter III.
[3]この等式の導出につては，付録を見よ．

これは，次のような考察から導かれると考えられる．まず，各期ごとに最適資本ストックが産出量に比例して

$$k_t^* = vy_t$$

のように定まる．投資需要は，現存資本ストックと，各期の産出量に対応する最適資本ストックの差を埋めるように定まる．すなわち

$$z = k_t^* - k_{t-1}$$

資本ストックの最適水準と実際の水準との差がこのように1期間で埋められるものとすると $k_{t-1} = k_{t-1}^*$ となっているはずである．したがって

$$z = k_t^* - k_{t-1}^* = v(y_t - y_{t-1})$$

前節の「代替の原理」によると，生産が比率に関する収穫逓減の法則と規模に関する収穫不変の法則とに服するとき，もし相対要素価格 $(r+\delta)/w$ が不変であるならば，最適資本ストックが産出量に比例して定まる．したがってそのとき,「代替の原理」から加速度原理の関係が導かれる．

3.2　限界効率の理論

多くのマクロ経済学の教科書では，投資需要を限界効率の概念に基づいて説明している．それは，Keynes [4] によるものである．この理論は，代替の原理に基づく理論と同値である．

投資の限界効率とは，追加投資の内部収益率である．そこで，内部収益率とは何かを見ておこう．

内部収益率　はじめに，収益の生じるのが1回限りの投資を考えよう．今期 x 円の投資が来期 y 円の収益を生むとする．そのとき

$$x = \frac{y}{1+\rho}$$

を満たす ρ をその投資の内部収益率という．つまり，収益の割引現在価値を投資額に等しくする割引率である．これは，純収益の投資額に対する割合 $\rho = (y-x)/x$ とみることもできる．つぎに，収益が多期間にわたる投資を考えよう．今期 x 円の投資が来期以降 T 期にわたって $y_1, y_2, \cdots, y_T$ 円の収益を生むとする．この場合も，収益の割引現在価値を投資額に等しくする割引率，すなわち

$$x = \frac{y_1}{1+\rho} + \frac{y_2}{(1+\rho)^2} + \cdots + \frac{y_T}{(1+\rho)^T}$$

を満たす ρ をその投資の内部収益率という．これは，純収益を各期に均等化した場合に，均等の純収益の投資額に対する割合である．実際，均等の純収益を $\bar{y}$ とすると

$$x = \frac{\bar{y}}{1+\rho} + \frac{\bar{y}}{(1+\rho)^2} + \cdots + \frac{\bar{y}}{(1+\rho)^T} + \frac{x}{(1+\rho)^T}$$

したがって

$$\bar{y} = \rho x$$

[4] Keynes (1936), Chapter 11.

企業の実物投資　所与の生産目標を達成しようとする企業は，投資の増加を通して将来の投資収益を増やすことができる．再び収益が1回限りの例を考えよう．初期資本ストックを k_0，2期目の生産量を y とすると，1期目に z の投資を行う場合の2期目の収益は

$$R = y - wl + (1-\delta)k, \quad f(k,l) = y, \quad k = k_0 + z$$

生産量を $\bar{y}$ に定め投資の水準を z からさらに Δz だけ高めると，生産に用いられる資本ストック k が増え，資本ストックの増加が (1) 労働の節約を通して (2) 残存資本ストック増を通して2期目の収益を増やす．実際，生産の条件 $f(k,l) = \bar{y}$ から，収益の増分 ΔR は

$$\Delta R = \left[w\frac{f_k}{f_l} + (1-\delta) \right] \Delta z$$

である．[5]このとき

$$\Delta z = \frac{\Delta R}{1+\rho}$$

を満たす ρ を，投資水準 z における**投資の限界効率**という．[6]

企業は，投資の限界効率と利子率とを比較して，利潤を最大化する投資水準 z^* を定めることができる．いま，市場利子率を r として，2期目の収益 R の割引現在価値 $R/(1+r)$ を v とすると，企業が最大化する利潤 π は

$$\pi = v - z$$

したがって，追加投資 Δz の大きさと，それによって生じる収益の割引現在価値の増分 Δz の大きさを比較すれば，追加投資が利潤 π を増加させるかどうかが分かる．(a) $\Delta v > \Delta z$ のとき π 増加し (b) $\Delta v < \Delta z$ のとき π 減少する．Δz が正のとき Δv は正，Δz が負のとき Δv は負であると考えてよいから，利潤最大化の投資水準では

$$\Delta v = \Delta z$$

でなければならない．一方，限界効率および割引現在価値の定義は

$$\Delta v = \frac{\Delta R}{1+r}, \quad \Delta z = \frac{\Delta R}{1+\rho}$$

したがって $r > \rho, r = \rho, r < \rho$ に対応して $\Delta v < \Delta z, \Delta v = \Delta z, \Delta v > \Delta z$ であるから，最適化の必要条件は

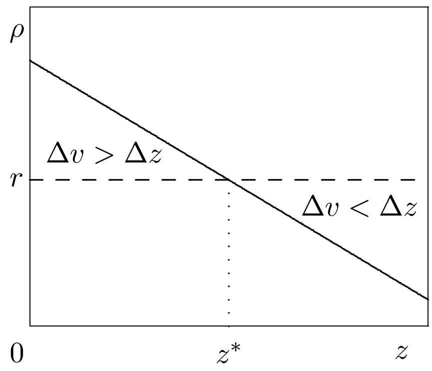
$$r = \rho$$

限界効率の逓減　限界代替率逓減の法則により $\Delta R/\Delta z = w(f_k/f_l) + (1-\delta)$ は z の減少関数である．したがって $\rho = w(f_k/f_l) - \delta$ も z の減少関数である．これを限界効率逓減の法則という．投資が限界効率逓減の法則に服するとき，利潤最大化の必要条件を満たす投資水準は，実際に利潤を最大化している．つまり，必要条件はまた十分条件でもある．このことは，限界効率逓減の法則の下で $z < z^*$ のとき $\Delta v > \Delta z$，$z > z^*$ のとき　$\Delta v < \Delta z$ であることから明らかである．

[5]この計算では，Keynes (1936) と同様，資本ストックの増加による収益の増加と投資の増加による収益の増加は同じであるとみている．Lerner (1944) は，両者の区別を指摘する．「投資の調整費用」の問題である．

[6]厳密な定義は以下のようになる．

$$1 = \frac{dR/dz}{1+\rho}$$



代替の原理との関係　投資の限界効率は $w(f_k/f_l) - \delta$ に等しいから，利潤最大化の条件 $r = \rho$ から

$$r = w\left(\frac{f_k}{f_l}\right) - \delta$$

したがって

$$\frac{f_k}{f_l} = \frac{r + \delta}{w}$$

これは，代替の原理から導かれる最適条件に他ならない．

多期間の理論への拡張　投資収益の発生が１期間に限られる場合は，限界効率の概念を用いるまでもなく利潤最大化問題は解決する．そして，代替の原理に基づく理論と限界効率の理論とが同じであることはほとんど自明である．限界効率の理論は，投資収益が多期間にわたる場合への適用が一層重要である．[7]

投資収益が多期間にわたる場合へ限界効率の理論を拡張することは容易である．内部収益率の概念の多期間への拡張に対応して，投資の限界効率は

$$\Delta z = \frac{\Delta R_1}{1+\rho} + \frac{\Delta R_2}{(1+\rho)^2} + \cdots + \frac{\Delta R_T}{(1+\rho)^T}$$

を満たす ρ となる．また Δz によって生じた収益の増分の割引現在価値は

$$\Delta v = \frac{\Delta R_1}{1+r} + \frac{\Delta R_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{\Delta R_T}{(1+r)^T}$$

である．１期間の理論と同様，$\Delta v = \Delta z$ が利潤最大化の必要条件となることは明らかである．もし正の Δz に対して $\Delta R_1, \Delta R_2, \cdots, \Delta R_T$ がすべて正であるならば，１期間の理論と同様，$r > \rho, r = \rho, r < \rho$ に対応して $\Delta v < \Delta z, \Delta v = \Delta z, \Delta v > \Delta z$ である．したがって利潤最大化の必要条件は，やはり１期間の理論と同様

$$r = \rho$$

となる．この場合も，投資水準 z の上昇とともに投資の限界効率が逓減すれば，利潤最大化の必要条件 $r = \rho$ は，その十分条件にもなっている．

[7] Keynes は，投資の決定に予想が重要な役割を果たすことを強調し，収益が多期間にわたる場合について，限界効率に基づく理論を展開する．Keynes (1936), p. 138–139.

限界効率の理論と代替の原理との同値性は，投資効果が各期のあいだで均等でなければ，直接には導かれない．限界効率と限界代替率との関係 $\rho = w(f_k/f_l) - \delta$ が，限界効率の定義から導かれないからである．しかし，企業の均衡条件 $r = \rho$ が成り立つとき $r = w(f_k/f_l) - \delta$ が各期ごとに成り立つこと，したがって各期ごとに

$$\frac{f_k}{f_l} = \frac{r+\delta}{w}$$

が成り立つことは，Arrow (1964) 等によって確かめられている．

参考文献

Alfred Marshall (1961) *Principles of Economics.* 9th (variorum) edition. London: Macmillan.

John M. Keynes (1936) *The General Theory of Employment, Interest and Money.* London: Macmillan.

Kenneth J. Arrow (1964) "Optimal Capital Policy, Cost of Capital and Myopic Decision Rules." *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 16: 21–30.

Abba P. Lerner (1944) *The Economics of Control.* New York: Macmillan. Chapter 25.

付　録

A. 企業の最大化の目的

1. 収益の名目値を名目利子率で割り引いた割引現在価値と，収益の実質値(不変価格表示)を実質利子率で割り引いた割引現在価値とは等しい．

   a. 生産物価格を p，賃金率を w とし，２期目の値には $'$ をつけて示す．名目利子率を i とすると利潤 π は

   $$\pi = \frac{p'y - w'l + (1-\delta)p'k}{1+i} - pz$$

   b. 物価上昇率を α，物価上昇を補正した実質賃金率を w とすると

   $$p' = (1+\alpha)p, \quad w' = (1+\alpha)w$$

   c. この関係を用いて，名目値の計算を実質値(不変価格）の計算に書き直せる．

   $$\frac{p'y - w'l + (1-\delta)p'k}{1+i} = \frac{py - wl + (1-\delta)pk}{(1+i)/(1+\alpha)}$$

   実質利子率 r を

   $$1 + r = \frac{1+i}{1+\alpha}, \quad r \approx i - \alpha$$

   と定義すると

   $$\frac{p'y - w'l + (1-\delta)p'k}{1+i} - pz = \frac{py - wl + (1-\delta)pk}{1+r} - pz$$

2. 不変価格の計算では，一般性を失うことなく，$p = 1$ としてよい．そのとき，利潤 π を表す式はつぎのようになる．

$$\pi = \frac{y - wl + (1-\delta)k}{1+r} - z$$

3. 生産物と投資財とが異質である場合への拡張は容易である．

   a. 投資財価格の生産物価格に対する比が，１期目の 1 を基準として２期目は $1+\beta$ になったとしよう．利潤 π は

   $$\pi = \frac{y - wl + (1-\delta)(1+\beta)k}{1+r} - z$$

   このことから，１期目の生産物を単位として計った２期目の資本用役価格を q とすると

   $$q = r - \beta + \delta + \beta\delta \approx r - \beta + \delta$$

   b. 名目値（当期価格）で考えてみると，資本財価格を p_k，その上昇率を α_k として

   $$\pi = \frac{p'y - w'l + (1-\delta)(1+\alpha_k)p_k k}{1+i} - p_k z$$

   したがって２期目の資本用役価格 q_k は

   $$q_k = (i - \alpha_k + \delta + \alpha_k\delta)p_k \approx (i - \alpha_k + \delta)p_k$$

B. 限界生産力原理

競争市場の均衡では純収益率が均等化するから

$$\frac{y - wl - \delta}{k} = r$$

したがって

$$y = (r+\delta)k + wl$$

これを分配の等式と呼ぶ．一方，大体の原理により，費用最小化の均衡で

$$\frac{f_k}{f_l} = \frac{r+\delta}{w}$$

そこで

$$\frac{f_k}{r+\delta} = \frac{f_l}{w} = \theta$$

とおくと，分配の等式から

$$y = \theta(f_k k + f_l l)$$

さらに，Euler の定理を規模に関する収穫不変，すなわち生産関数 $f(k,l)$ が k と l に関して１次同次である場合に適用して

$$y = f_k k + f_l l$$

したがって $\theta = 1$ となるので

$$f_k = r + \delta, \quad f_l = w$$