基礎マクロ経済学　練習問題［第4回］解答例

担当：別所俊一郎

1　OLG モデルからの IS 曲線の導出

Unit 21 で展開されているマクロモデルを考え，政府の財政政策，中央銀行の発行する貨幣をともに考慮に入れた OLG モデルから IS 曲線を導出してみよう．

(1) t 期生まれの家計の解くべき効用最大化問題を，

$$\max_{m_{t+1}, c_{o,t+1}} u_t = \left(\frac{m_{t+1}}{P_t}\right)^{\theta} (c_{o,t+1})^{1-\theta},$$

$$\text{subject to } a_{t+1} = w_t - \frac{m_{t+1}}{P_t} - t_{y,t}, \quad \text{and} \quad c_{o,t+1} = (1+r_{t+1})a_{t+1} + \frac{m_{t+1}}{P_{t+1}} - t_{o,t+1}$$

とするとき，家計の貨幣需要関数が

$$\frac{m_{t+1}}{P_t} = \frac{\theta w_t(1+i_{t+1}) - \theta \tilde{T}_t(1+\pi_{t+1})}{i_{t+1}}$$

となることを示せ．ただし，

$$\tilde{T}_t = (1+r_{t+1})t_{y,t} + t_{o,t+1}$$

とする．

(2) 家計の保有する資産 a_{t+1} は，企業への投資 k_{t+1} と，公債への投資 b_{t+1} に振り分けられる．このとき，資本の遷移方程式が

$$k_{t+1} = \left[1 - \frac{\theta(1+i_{t+1})}{i_{t+1}}\right](1-\beta)Ak_t^{\beta} + \theta\frac{1+\pi_{t+1}}{i_{t+1}}\tilde{T}_t - t_{y,t} - b_{t+1}$$

となることを示せ．ただし，人口成長はないものとする．

(3) $t_{y,t} = 0$，$\pi_{t+1} = 0$ とするとき，F_t を適当に定義することによって IS 曲線が

$$Y_t = \frac{N(A\beta)^{\frac{1}{1-\beta}} r^{\frac{1}{\beta-1}} + F_t}{(1-\beta)\left[1 - \frac{\theta(1+r_{t+1})}{r_{t+1}}\right]}$$

となることを示せ（教科書 228 ページと似たような形だが，F_t の定義がやや異なる）．

(1) 家計の予算制約式をまとめてみると,

$$
\begin{aligned}
c_{o,t+1} &= (1+r_{t+1})\left(w_t - \frac{m_{t+1}}{P_t} - t_{y,t}\right) + \frac{m_{t+1}}{P_{t+1}} - t_{o,t+1} \\
&= (1+r_{t+1})w_t - [(1+r_{t+1})t_{y,t} + t_{o,t+1}] - \frac{m_{t+1}}{P_t}\left((1+r_{t+1}) - \frac{P_t}{P_{t+1}}\right)
\end{aligned}
$$

となるので，移項すると,

$$
c_{o,t+1} + \frac{m_{t+1}}{P_t}\left((1+r_{t+1}) - \frac{P_t}{P_{t+1}}\right) = (1+r_{t+1})w_t - [(1+r_{t+1})t_{y,t} + t_{o,t+1}]
$$

を得る．ここで，生涯税負担 $\tilde{T}_t$ の定義を用いると,

$$
c_{o,t+1} + \frac{m_{t+1}}{P_t}\left((1+r_{t+1}) - \frac{P_t}{P_{t+1}}\right) = (1+r_{t+1})w_t - \tilde{T}_t
$$

これを効用関数に代入して最適化の 1 階の条件を求めると（ラグランジアンを用いてもよい）,

$$
\frac{m_{t+1}}{P_t} = \frac{\theta w_t(1+i_{t+1}) - \theta\tilde{T}_t(1+\pi_{t+1})}{i_{t+1}}
$$

を得る．

(2) 家計の予算制約式より,

$$
k_{t+1} + b_{t+1} = w_t - \frac{m_{t+1}}{P_t} - t_{y,t}
$$

であるから，これに (1) で求めた貨幣需要関数を代入すると,

$$
\begin{aligned}
k_{t+1} + b_{t+1} &= w_t - \frac{\theta w_t(1+i_{t+1}) - \theta\tilde{T}_t(1+\pi_{t+1})}{i_{t+1}} - t_{y,t} \\
&= \left[1 - \frac{\theta(1+i_{t+1})}{i_{t+1}}\right] w_t + \theta\tilde{T}_t\frac{1+\pi_{t+1}}{i_{t+1}} - t_{y,t}
\end{aligned}
$$

移項して，$w_t = (1-\beta)Ak_t^\beta$ を用いると,

$$
k_{t+1} = \left[1 - \frac{\theta(1+i_{t+1})}{i_{t+1}}\right](1-\beta)Ak_t^\beta + \theta\tilde{T}_t\frac{1+\pi_{t+1}}{i_{t+1}} - t_{y,t} - b_{t+1}
$$

人口成長がなければ，この式がそのまま資本の遷移方程式となる．

(3) IS-LM 分析では物価は一定だからインフレ率を $\pi_{t+1} = 0$ としてフィッシャー方程式が成り立つとし，さらに現役世代への課税がないとすると，資本の遷移方程式は,

$$
k_{t+1} = \left[1 - \frac{\theta(1+i_{t+1})}{i_{t+1}}\right](1-\beta)y_t + \frac{\theta}{i_{t+1}}t_{o,t+1} - b_{t+1}
$$

これをマクロ変数になおすために両辺 N 倍して移項して整理すると（Unit 21 の展開と同じ），

$$Y_t = \frac{N(A\beta)^{\frac{1}{1-\beta}} r^{\frac{1}{\beta-1}} + B_{t+1} - \frac{\theta}{r_{t+1}} t_{o,t+1}}{(1-\beta)\left[1 - \frac{\theta(1+r_{t+1})}{r_{t+1}}\right]}$$

となる．ここで，

$$F_t = B_{t+1} - \frac{\theta}{r_{t+1}} t_{o,t+1}$$

とおくと所望の結果を得る．F_t が財政政策の大きさを表しているとすると，ここでは，公債発行の増加あるいは減税が拡張的な財政政策を表現することになる．公債発行を増加させれば財政支出を増やすことができることに注意しよう．

2 IS-LM 分析のよくある練習問題 1

(1) 消費関数を $C = 200 + 0.75(Y - T)$，投資関数を $I = 200 - 25r$ とするとき，IS 曲線を求めなさい

(2) 貨幣需要関数を $(M/P) = Y - 100r$ とし，政府支出が 100，租税が 100，マネーサプライが 1000，物価水準が 2 であるとき，均衡の利子率と生産量を求めなさい．

(3) 政府支出が 150 に増えたとき，生産量と利子率はどう変化しますか

(1) GDP の生産面と支出面の三面等価の原則と，財市場の均衡条件から，

$$Y = C + I + G$$

が成り立つから，消費関数と投資関数を代入すると，

$$Y = 200 + 0.75(Y - T) + 200 - 25r + G$$

整理すると，

$$Y = 1600 - 3T - 100r + 4G$$

となって，IS 曲線を得る．

(2) $G = 100, T = 100$ を代入すると，IS 曲線は

$$Y = 1600 - 300 - 100r + 400 = 1700 - 100r$$

また，LM 曲線は

$$1000/2 = Y - 100r$$

IS，LM を連立させて解くと，

$$Y = 1100, \quad r = 6$$

(3) $G = 150, T = 100$ を代入すると，IS 曲線は

$$Y = 1600 - 300 - 100r + 600 = 1900 - 100r$$

IS，LM を連立させて解くと，

$$Y = 1200, \quad r = 7$$

となるので，生産量が増え，利子率が上昇する．利子率が $r = 6$ のままであれば $I = 50$ であるところ，利子率が $r = 7$ に上昇したために $I = 25$ へと減少しており，クラウディングアウトが発生していることに注意しよう．

3 IS-LM 分析のよくある練習問題 2

(1) 投資の利子弾力性がゼロのとき，IS 曲線の傾きはどうなりますか?

(2) 投資の利子弾力性がマイナス無限大のとき，IS 曲線の傾きはどうなりますか?

(3) 貨幣需要の利子弾力性がゼロのとき，LM 曲線の傾きはどうなりますか?

(4) 貨幣需要の利子弾力性がマイナス無限大のとき，LM 曲線の傾きはどうなりますか?

(5) 上記 4 つのうち，財政支出を増加させても総生産が増加しないという意味で財政政策が無効になるのはどのケースですか?

(6) 上記 4 つのうち，貨幣供給を増加させても総生産が増加しないという意味で金融政策が無効になるのはどのケースですか?

1. IS 曲線を

$$Y = C(Y) + I(r) + G$$

と考えよう．投資の利子弾力性がゼロのとき，I は利子率の水準によらず一定の値をとる．このとき，IS 曲線は Y のみの関数となるので，縦軸に r，横軸に Y をとると IS 曲線は垂直な直線となる．

投資の利子弾力性がゼロに近いほど小さいケースを考えてみよう．$Y-r$ 平面上の 1 点で財市場が均衡しているとしよう．このとき，利子率 r が上昇したとすると，投資の利子弾力性が小さければ $I(r)$ の量はほとんど変化しない．IS 曲線は $Y = C(Y)+I(r)+G$ を満たすような (Y,r) の組み合わせの軌跡だから，$I(r)$ がほとんど変化しなければ Y もほとんど変化しなくても財市場の均衡は維持される．したがって，IS 曲線は垂直に近くなる．逆に，総生産 Y が増加したとしよう．Y が大きくなっても $Y = C(Y)+I(r)+G$ が成り立つためには $I(r)$ があるていど大きくなければならないが，投資の利子弾力性が小さければ，$I(r)$ が変化するためには r は大きく変化しなければならない．こう考えても，IS 曲線が垂直になることがわかるだろう．

2. 投資の利子弾力性がマイナス無限大のとき，財市場の均衡をもたらすような r はひとつの値に固定されてしまう．したがって，$Y-r$ 平面上では IS 曲線は水平な直線となる．

   (1) と同様に，投資の利子弾力性がマイナスの大きな値をとると考えて，$Y-r$ 平面上の 1 点で財市場が均衡しているとしよう．このとき，利子率 r が少しだけ増加したとすると，投資の利子弾力性が非常に（マイナスに）大きければ $I(r)$ の量は大きく減少する．IS 曲線は $Y = C(Y) + I(r) + G$ を満たすような (Y,r) の組み合わせの軌跡だから，$I(r)$ が大きく減少すれば Y が大きく減少しなければ財市場の均衡は維持されない．したがって，IS 曲線は水平に近くなる．逆に，総生産 Y が増加したとしよう．Y が大きくなっても $Y = C(Y) + I(r) + G$ が成り立つためには $I(r)$ があるていど大きくなければならないが，投資の利子弾力性が非常に大きければ，$I(r)$ が変化するためには r はわずかに変化しさえすればよい．こう考えても，IS 曲線が水平に近くなることがわかるだろう．

3. LM 曲線は，貨幣需要の需給均衡条件

$$\frac{\overline{M}}{P} = L(r,Y)$$

   を満たすような (Y,r) の組み合わせの軌跡であることを思い出そう．貨幣需要の利子弾力性がゼロのとき，$L(r,Y)$ は利子率 r の水準によらず一定の値をとる．このとき，LM 曲線は Y のみの関数となるので，LM 曲線は垂直な直線となる．

   貨幣需要の利子弾力性がゼロに近いほど小さいケースを考えてみよう．$Y-r$ 平面上の 1 点で貨幣市場が均衡しているとする．このとき，利子率 r が上昇したとしても，貨幣需要の利子弾力性が小さければ $L(r,Y)$ の量はほとんど変化しない．LM 曲線は $\overline{M}/P = L(r,Y)$ を満たすような (Y,r) の組み合わせの軌跡であり，左辺の貨幣供給量はさしあたって一定であるから，$L(r,Y)$ がほとんど変化しなければ Y もほとんど変化しなくても貨幣市場の均衡は維持される．したがって，LM 曲線は垂直に近くなる．逆に，総生産 Y が増加したとしよう．Y が大きくなっても $\overline{M}/P = L(r,Y)$ が成り立つためには r が変化することによって貨幣需要が減少しなければならないが，貨幣需要の利子弾力性が小さければ，貨幣需要が変化するためには r は大きく変化しなければならない．こう考えても，LM 曲線が垂直になることがわかるだろう．

4. 貨幣需要の利子弾力性がマイナス無限大のとき，貨幣市場の均衡をもたらすような r はひとつの値に固定されてしまう．したがって，$Y-r$ 平面上では LM 曲線は水平な直線となる．

   貨幣需要の利子弾力性が非常に（マイナスに）大きいケースを考えてみよう．$Y-r$ 平面上の 1 点で貨幣市場が均衡しているとする．このとき，利子率 r が上昇したとすると，貨幣需要の利子弾力性が非常に大きければ $L(r,Y)$ の量は大きく変化する．LM 曲線は $\overline{M}/P=L(r,Y)$ を満たすような (Y,r) の組み合わせの軌跡であり，左辺の貨幣供給量はさしあたって一定であるから，$L(r,Y)$ が r の変化によって大きく動いてしまったときには，Y が大きく動かなければ貨幣市場の均衡は維持されない．したがって，LM 曲線は水平に近くなる．逆に，総生産 Y が増加したとしよう．Y が大きくなっても $\overline{M}/P=L(r,Y)$ が成り立つためには r が変化することによって貨幣需要が減少しなければならないが，貨幣需要の利子弾力性が非常にマイナスに大きければ，貨幣需要が変化するためには r はわずかに増加しさえすればよい．こう考えても，LM 曲線が水平になることがわかるだろう．

   (4) で扱ったケースは，**流動性のわな（liquidity trap）**と呼ばれ，利子率が低く，貨幣需要がすでに十分に大きいときに発生しやすいと言われている（利子率がゼロのときには発生する）．

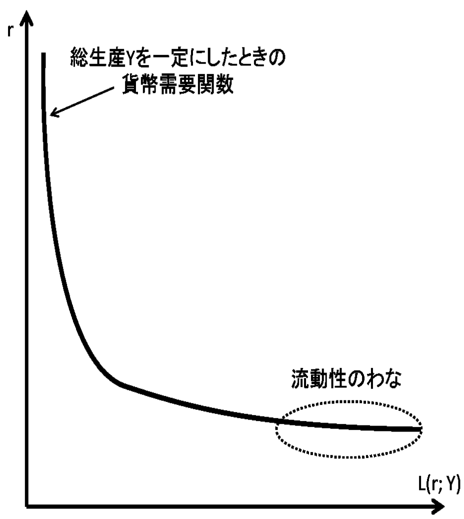

図 1: 貨幣需要関数と流動性のわな

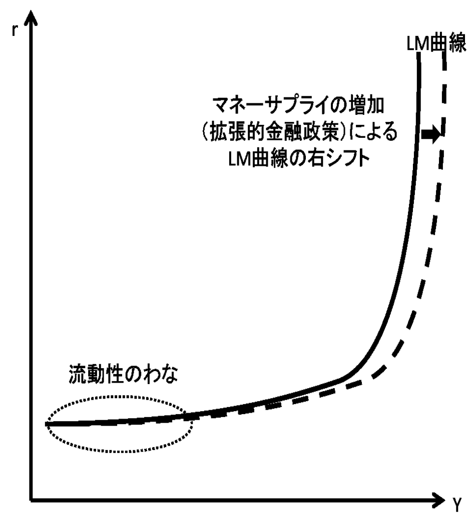

図 2: LM 曲線と流動性のわな

5. **投資の利子弾力性がマイナス無限大のとき，あるいは，貨幣需要の利子弾力性がゼロのときには財政政策が無効になる**.

それぞれ，IS 曲線が水平，LM 曲線が垂直なケースに対応する．グラフで見ると，拡張的財政政策は IS 曲線の右シフトで表現されるので，LM 曲線との交点によって定まる均衡の総生産は変化していないことがわかる．

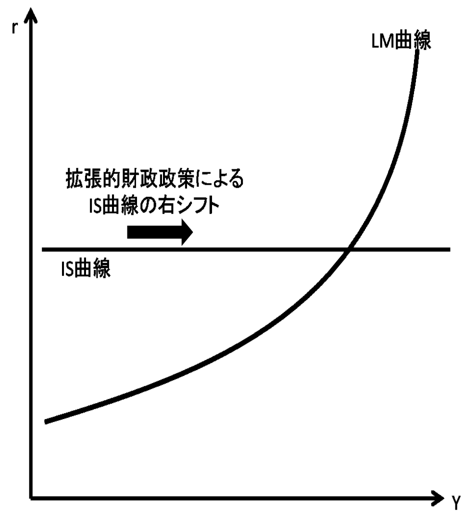

図 3: 財政政策が無効：IS が水平

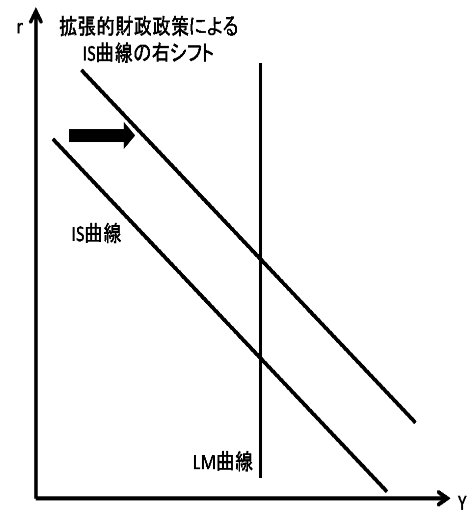

図 4: 財政政策が無効：LM が垂直

拡張的財政政策によって総生産量が大きくなると，貨幣市場で均衡を回復するために利子率が上昇し，この利子率の上昇が民間投資を抑制する．投資の利子弾力性が（マイナスで）大きければ，利子率の上昇に伴う投資の減少が大きくなり，極端なケースでは拡張的財政政策による総生産の増加を相殺する．貨幣の利子弾力性が小さければ，貨幣市場で均衡を回復するための利子率の上昇が大幅なものとなるために，やはり民間投資が抑制され，総生産の増加が相殺されてしまう．

6. **投資の利子弾力性がゼロのとき，あるいは，貨幣需要の利子弾力性がマイナス無限大のときには金融政策が無効になる**．それぞれ，IS 曲線が垂直，LM 曲線が水平なケースに対応する．グラフで見ると，拡張的金融政策は LM 曲線の右シフトで表現されるので，IS 曲線との交点によって定まる均衡の総生産は変化していないことがわかる．

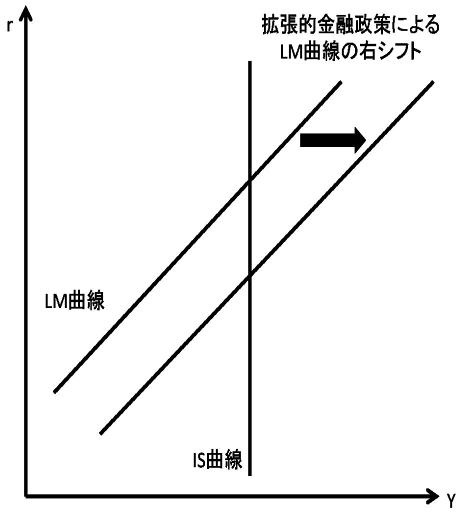

図 5: 金融政策が無効：IS が垂直

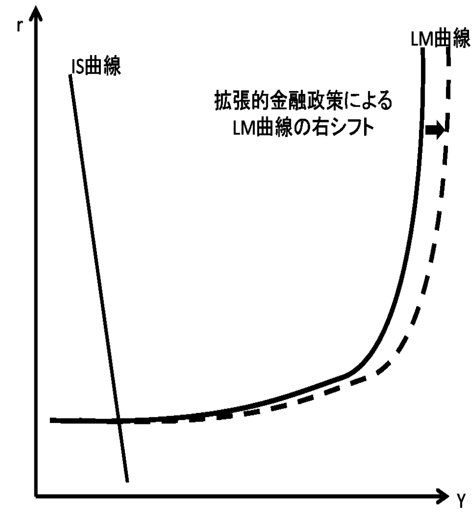

図 6: 金融政策が無効：LM が水平

拡張的金融政策によってマネーサプライが増加すると，貨幣市場で均衡を回復するためにまず利子率が下落する．投資の利子弾力性が極めて小さければ，利子率の下落は民間投資を刺激しないので，総生産が変化しなくても財市場が均衡してしまう．貨幣市場の均衡は利子率の下落のみで達成され，財市場ではなにも変化が起きず，金融政策は総生産を増加させることができない．

貨幣需要の利子弾力性がマイナス無限大であるとき，拡張的金融政策によってマネーサプライが増加しても，その増加分は金利を変化させないままに貨幣需要に吸収されてしまい，総生産の変化がなくても貨幣市場は均衡を保ってしまう．利子率が変化しないので財市場にはなんの変化ももたらされず，金融政策は総生産を増加させることができない．90 年代後半の日本経済は，このような**流動性のわな（liquidity trap）**に陥ってしまったと言われており，超低金利政策という拡張的金融政策は効力を発揮できなかったといわれる．この時期，拡張的な財政政策（累次の「経済対策」）の発動を支持したのはこのような解釈でもあったと考えられる．