基礎マクロ経済学　練習問題［第2回］解答例

担当：別所俊一郎

1　三面等価

減価償却がゼロであるとき，粗投資と資本ストックとのあいだには

$$I_t = K_{t+1} - K_t$$

が成り立つ．Unit 13 のように政府部門のない 2 期間世代重複モデルを想定するとき，家計と企業の最大化問題の 1 階の必要条件と予算制約式から，

$$I_t = Y_t - C_t = S_t$$

を示せ．

減価償却がゼロのとき，

$$I_t = K_{t+1} - K_t$$

が成り立つ．足して引いてみると，

$$I_t = K_{t+1} - (1 + r_t)K_t + r_tK_t$$

$t + 1$ 期の資本市場の均衡条件 $K_{t+1} = N_ta_{t+1}$，t 期の資本市場の均衡条件 $K_t = N_{t-1}a_t$ を代入すると，

$$I_t = K_{t+1} - (1 + r_t)K_t + r_tK_t = N_ta_{t+1} - (1 + r_t)N_{t-1}a_t + r_tK_t$$

t 期の現役・引退世代の予算制約式 $a_{t+1} = w_t - c_{y,t}$，$(1 + r_t)a_t = c_{o,t}$ を代入すると，

$$I_t = N_ta_{t+1} - (1 + r_t)N_{t-1}a_t + r_tK_t = N_t(w_t - c_{y,t}) - N_{t-1}c_{o,t} + r_tK_t$$

整理すると，

$$I_t = N_tw_t + r_tK_t - (N_tc_{y,t} + N_{t-1}c_{o,t})$$

労働市場の均衡条件 $N_t = L_t$，マクロ変数の定義 $C_t = N_tc_{y,t} + N_{t-1}c_{o,t}$ より，

$$I_t = N_tw_t + r_tK_t - (N_tc_{y,t} + N_{t-1}c_{o,t}) = w_tL_t + r_tK_t - C_t$$

分配面と生産面からみた三面等価 $Y_t = w_tL_t + r_tK_t$ を用いると，

$$I_t = w_tL_t + r_tK_t - C_t = Y_t - C_t = S_t$$

これにより所望の式が得られた．Q.E.D.

2 技術進歩と経済成長

Unit 13 と同じように政府部門のない 2 期間世代重複モデルを考えよう．ただし，企業の生産関数を

$$Y_t = A_t K_t^{\beta} L_t^{1-\beta}$$

とし，人口規模も世代によって異なるとしよう．以下の問いに答えよ．

1. 家計の効用最大化問題と企業の利潤最大化問題を解き，以下の最適化のための 1 階の必要条件を導け．

$$c_{y,t} = \alpha w_t, \quad a_{t+1} = (1-\alpha) w_t$$
$$r_t = \beta A_t K_t^{\beta-1} L_t^{1-\beta}, \quad w_t = (1-\beta) A_t K_t^{\beta} L_t^{-\beta}$$

2. 資本市場の均衡条件式 $K_{t+1} = N_t a_{t+1}$ から，以下を導け．

$$K_{t+1} = N_t (1-\alpha)(1-\beta) A_t K_t^{\beta} L_t^{-\beta}$$

3. 以下のように k_t を定義し，k_t の遷移方程式を導け．

$$k_t = \frac{K_t}{A_t^{1/(1-\beta)} N_t}$$

4. 人口成長率 $n = N_{t+1}/N_t$ と，技術進歩率 $g = A_{t+1}^{1/(1-\beta)}/A_t^{1/(1-\beta)}$ が一定であれば k_t に定常状態があることを，図 3-8 と同様の図を書いて示せ．また，Y_t の成長率が $n+g$ になることを示せ．

1. 家計の効用最大化問題は，

$$\max_{c_{y,t}, c_{o,t+1}} c_{y,t}^{\alpha} c_{o,t+1}^{1-\alpha} \quad \text{subject to} \quad c_{o,t+1} = (1+r_{t+1})(w_t - c_{y,t})$$

と定式化される．予算制約式を効用関数に代入すると，

$$u = c_{y,t}^{\alpha}((1+r_{t+1})(w_t - c_{y,t}))^{1-\alpha}$$

家計は $c_{y,t}$ だけを操作できるから，最大化の 1 階の必要条件を求めると，

$$\frac{du}{dc_{y,t}} = \alpha c_{y,t}^{\alpha-1}((1+r_{t+1})(w_t - c_{y,t}))^{1-\alpha} + (1-\alpha) c_{y,t}^{\alpha}((1+r_{t+1})(w_t - c_{y,t}))^{-\alpha}[-(1+r_{t+1})] = 0$$

変形すると，

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\alpha(1+r_{t+1})(w_t-c_{y,t})}{c_{y,t}}-(1-\alpha)(1+r_{t+1})\right)c_{y,t}^{\alpha}((1+r_{t+1})(w_t-c_{y,t}))^{-\alpha}=0\\
&\frac{\alpha(w_t-c_{y,t})}{c_{y,t}}-(1-\alpha)=0\\
&\alpha(w_t-c_{y,t})=(1-\alpha)c_{y,t}\\
&c_{y,t}=\alpha w_t
\end{aligned}
$$

予算制約式に代入すると，

$$
\begin{aligned}
&a_{t+1}=w_t-c_{y,t}=w_t-\alpha w_t=(1-\alpha)w_t\\
&c_{o,t+1}=(1+r_{t+1})(w_t-c_{y,t})=(1+r_{t+1})(1-\alpha)w_t
\end{aligned}
$$

企業の利潤最大化問題は，

$$
\max_{K_t,L_t}\pi_t=Y_t-r_tK_t-w_tL_t\quad\text{subject to}\quad Y_t=A_tK_t^{\beta}L_t^{1-\beta}
$$

と定式化される．予算制約式を利潤関数に代入すると，

$$
\pi_t=A_tK_t^{\beta}L_t^{1-\beta}-r_tK_t-w_tL_t
$$

企業は K_t,L_t を操作できるから，最大化の 1 階の必要条件を求めると，

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\pi_t}{\partial K_t}=\beta A_tK_t^{\beta-1}L_t^{1-\beta}-r_t=0\\
&\frac{\partial\pi_t}{\partial L_t}=(1-\beta)A_tK_t^{\beta}L_t^{-\beta}-w_t=0
\end{aligned}
$$

を得る．

2. 資本市場の均衡条件式 $K_{t+1}=N_ta_{t+1}$ に，家計の効用最大化の 1 階の必要条件を代入すると，

$$
K_{t+1}=N_ta_{t+1}=N_t((1-\alpha)w_t)
$$

企業の利潤最大化の労働についての 1 階の必要条件を代入すると，

$$
K_{t+1}=N_t((1-\alpha)w_t)=N_t(1-\alpha)(1-\beta)A_tK_t^{\beta}L_t^{-\beta}
$$

を得る．

3. k_t の定義から，

$$
K_t=A_t^{1/(1-\beta)}N_tk_t
$$

であるから，資本市場の均衡条件式に代入すると，

$$A_{t+1}^{1/(1-\beta)}N_{t+1}k_{t+1} = N_t(1-\alpha)(1-\beta)A_t(A_t^{1/(1-\beta)}N_tk_t)^{\beta}L_t^{-\beta}$$

労働市場の均衡条件を使って整理すると，

$$k_{t+1} = \frac{N_t}{N_{t+1}}\frac{A_t^{1/(1-\beta)}}{A_{t+1}^{1/(1-\beta)}}(1-\alpha)(1-\beta)k_t^{\beta}$$

を得る．これが資本の遷移方程式である．

4. 人口成長率 $n = N_{t+1}/N_t$ と，技術進歩率 $g = A_{t+1}^{1/(1-\beta)}/A_t^{1/(1-\beta)}$ が一定であれば，資本の遷移方程式は，

$$k_{t+1} = \frac{1}{n}\frac{1}{g}(1-\alpha)(1-\beta)k_t^{\beta}$$

となる．$\frac{1}{n}\frac{1}{g}(1-\alpha)(1-\beta)$ は定数であるから，図 3-8 と同じ図を描くことができ，k_t に定常状態があることがわかる．経済全体の生産量は

$$Y_t = A_tK_t^{\beta}L_t^{1-\beta} = A_t^{1/(1-\beta)}N_tk_t^{\beta}$$

となるので，定常状態で k_t が一定であれば，Y_t の成長率は人口成長率 $n = N_{t+1}/N_t$ と，技術進歩率 $g = A_{t+1}^{1/(1-\beta)}/A_t^{1/(1-\beta)}$ の成長率の和で表現される．