操作変数法 (2)

別所俊一郎

2006 年 6 月 23 日

Today's attraction

- 操作変数の妥当性
- 操作変数の外生性
- タバコ消費にみる具体例

適切な操作変数の条件

適切な操作変数を選ばなければ，2 段階最小 2 乗法による推定量は望ましい性質を持たない

- 妥当性（relevance）：内生性をもつ説明変数と相関を持つ
- 外生性（exogeneity）：誤差項と相関を持たない

操作変数の候補となりうる変数が，操作変数として適切か（valid）どうかを判定することが必要

- 適切かどうかをどう判定するか
- 適切でない場合にはどうするか

操作変数の妥当性

操作変数は内生変数と相関をもつ，とは?

- 内生性のある説明変数の変動の多くが操作変数で説明できれば，より多くの情報を利用できるので望ましい
- より relevant な操作変数を用いれば，より正確な推定値を得ることができやすくなる
- その意味では「サンプルサイズは大きいほうがいい」と似たような状況

2 段階最小 2 乗法の統計的推測は，$n \to \infty$ のとき，2 段階最小 2 乗推定量が正規分布に従う，という性質を利用

- 中心極限定理（Central Limit Theorem）による
- 操作変数は，ただ relevant であればよいわけではなく，highly relevant であるほうが望ましい

操作変数の妥当性とWeak Instruments

Weak Instruments

- 内生性のある説明変数との相関が小さい（が，無相関ではない）操作変数のこと
- 内生変数の変動をほとんど説明できない
- タバコ需要の例：タバコ価格への操作変数としての，タバコ工場からの距離

外生性をもっていても weak な操作変数があるとき，どう判定し，対処するか？

Weak Instruments はなぜ問題か

Weak な操作変数を用いた場合には

- 正規分布は 2 段階最小 2 乗推定量の標本分布を，サンプルサイズが大きくても，うまく近似しない
- サンプルサイズが大きくても，通常の統計的推測を使うことが正当化されない
- (推定値 $\pm$ 1.96 $\times$ 標準誤差) の区間に真の値が入る確率が 95% よりかなり低くなる
- 要するに，信用が置けなくなる

Weak Instruments はなぜ問題か

操作変数 1 つ（$m = 1$），内生変数 1 つ（$k = 1$）のケースで

- 操作変数が valid であれば，

$$\hat{\beta}_1^{TSLS} = \frac{s_{ZY}}{s_{ZX}} \xrightarrow{p} \frac{\mathrm{cov}(Z,Y)}{\mathrm{cov}(Z,X)} = \beta_1$$

  となり，2 段階最小 2 乗推定量は一致性をもつ

- もし操作変数が relevant でなければ，

$$s_{ZX} \xrightarrow{p} \mathrm{cov}(Z,X) = 0$$

  となるので，2 段階最小 2 乗推定量は一致性を持たない．また，漸近的にも正規分布で近似できず，正規分布に従う 2 つの確率変数の比になる

じっさいに $\mathrm{cov}(Z,X) = 0$ と思われるケースはほとんどないが，どれくらい relevant であればよいのか?

Weak Instruments の判定法

内生変数 1 つ（$k=1$）のケースでよく知られた判定法

- 内生変数と操作変数の相関の強さを測ることができればよい

First stage F-statistic

- 1 段階目の回帰で操作変数の係数がすべてゼロという帰無仮説に対する F 値
- 操作変数が持っている情報量の指標のひとつ
- $F > 10$ であれば weak instruments の心配はないとされている

Weak Instrumentsへの対処法

時と場合による（It depends）

- もし操作変数の数（m）が大きくて，そのなかに weak instruments が混じっているのなら
  - Weak IV を使わずに 2 段階最小 2 乗推定を行うのがよい
  - 標準誤差が大きくなったとしても，問題ではない
- もし操作変数の数（m）が小さいか，exactly identified で，手許の操作変数を使う必要があるとき
  - 追加的な relevant な操作変数をみつけてくる
  - 他の推定方法を探る：LIML など

操作変数の外生性

操作変数が外生でなければ 2 段階最小 2 乗推定量は一致性を持たない

- 操作変数が外生：誤差項と相関を持たない
- 説明変数の変動のうち，誤差項と相関を持たない部分の情報を操作変数が持っている，というのが 2 段階最小 2 乗法の前提
- 操作変数が外生でなければ，説明変数の「外生的な」変動要因を抽出できない

操作変数の外生性は統計的に検定できるのか?

- **できない．**
- exactly identified の場合には，expert opinion に頼るしかない
- Overidentified のときには助けになるものがある

過剰識別制約検定

Test of overidentified restrictions

- 内生性を持つ説明変数の数 (k) より操作変数の数 (m) のほうが大きいとき，いくつかの操作変数を使わないことにすれば，何種類かの 2 段階最小 2 乗推定量を計算可能
  - $k = 1, m = 2$ のとき，exactly identified な 2 段階最小 2 乗推定を 2 つ可能
- 操作変数がすべて valid であれば，どの推定量も一致性を持つ
- 標本によるズレがあったとしても，一致推定量は似たような値になるはず
- 複数の推定値があまりに異なる値を取れば，少なくともどれか 1 つが一致推定量でないと考えられる
- いずれかの操作変数が外生性を満たしていない（Maintained hypothesis を仮定するとき）

過剰識別制約検定

- 実際にいくつもの推定値を計算するわけではない
- 操作変数 Z が誤差項 u と無相関であるなら，残差 $\hat{u}$ とも漸近的に無相関のはず

$$\hat{u}_i = Y_i - (X\hat{\beta}_x^{TSLS} + W\hat{\beta}_w^{TSLS})$$

- 残差 $\hat{u}$ を外生変数に回帰すれば，係数はすべてゼロになるはず

$$\hat{u}_i = Z\delta_z + W\delta_w + e$$

を推定して，帰無仮説 $\delta_z = \delta_w = 0$ を検定すればよい

- この帰無仮説は，<u>棄却されない</u> ほうがウレシイ.

過剰識別制約検定

J 統計量

- 帰無仮説 $\delta_z = \delta_w = 0$ に対する分散均一の仮定のもとでの F 統計量に対して

$$J \equiv mF \xrightarrow{d} \chi^2_{m-k}$$

- Exactly identified のときは J 統計量はつねにゼロ.
  - 外生であってもなくても，J 統計量はゼロ
  - 複数の一致推定量を計算することができないから
  - 直交条件で未知数と式の数が等しく，解が一意に定まるから
- 通常の仮説検定より緩い有意水準を使いがち (?)

タバコの需要関数推定への応用

- パネル推定の知識（Ch. 8）が必要な部分があるが…
- 需要関数は

$$\ln(Q_i) = \beta_0 + \beta_1 \ln(P_i) + \beta_2 \ln(\mathrm{Income}_i) + u_i$$

  観測される消費量は需要-供給の関係で決まるから，価格 P_i と誤差項 u_i が相関を持つ
- 操作変数として，general sales tax と cigarette-specific tax が候補
- 需要関数の誤差項に入っている要因とは何か?　それは操作変数と相関するか?
  - 所得：説明変数に入っている
  - 歴史的要因（タバコの産地）：政治過程を通じて税変数と相関しそう

タバコの需要関数推定への応用

- 歴史的要因をどう制御するか
  - タバコ産業の大きさなどの説明変数を追加
  - 要因が通時的に不変なら差分をとればよい（Ch. 8）
  - 操作変数も差分をとる
- 結果をみると
  - 1 段階目の F 値は問題なさそう
  - J 統計量が小さく，すくなくともどちらかに内生性の疑い
  - 2 つの「操作変数」のどちらかが外生なのか，双方とも内生なのかは，この検定からだけでは判定できない
  - Expert judgement が必要：政治過程はどちらに影響しやすいか？