2018年度

解析学**IIa** 講義ノート

新井 拓児 (慶應義塾大学経済学部)

2018 年 3 月 9 日

2018 年 3 月 9 日 初版

まえがき

これは，慶應義塾大学経済学部設置科目である「解析学 IIa」及び経済学研究科設置科目である「経済数学 III-A」の講義ノートである．講義は基本的にこのノートに沿って進められる．ただし，本講義で扱う内容は抽象的かつ難解である上，他の科目に比べかなり多くのことを学習する必要がある．そのため，証明などの細部は各受講生の予習復習に委ね，講義では背景や考え方の説明に多くの時間を費やす.

本講義では位相空間論を論じる．集合論の復習から始め，ユークリッド空間の抽象化として距離空間を導入し，さらにその抽象化として位相空間を導入する．特に，点列の収束と関数の連続性に関して，ユークリッド空間上での定義がどのように距離空間や位相空間上に一般化されていくのかを解説する．後半は，実数の連続性について詳しく議論し，連結性やコンパクト性などの位相空間論における諸概念と解析学との結びつきについて論じる.

本講義の目標は以下の三点である．一つは，数学における抽象化のプロセスを実体験することである．距離空間は「距離」の抽象化であり，位相空間は「近さ」または「周り」の抽象化である．これ以外にも「長さ」の抽象化としての測度など，数学では日常使われる概念の抽象化が良く行われる．この抽象化に慣れてもらうために，そのプロセスを分かりやすく解説する．二つ目は，当然成り立つと思えるような事柄を考察することである．抽象化を行うと，当然と思えるような事でも成立しないことがある．例えば,「収束点列の極限は一つである」は常に成立するような気がするが，一般の位相空間においては成り立たない．どのような場合に成り立つのかを明らかにし、収束や極限の理解を深めたい．普段疑問に思わないようなことに目を向けることは，数学において非常に重要である．三つ目は，位相空間論に登場する諸概念を用いて解析学を論じることである．解析学の見直しを行うと共に，コンパクトなどの位相空間論における諸概念の理解を深めたい.

各受講生の今後の学習や研究に少しでも資するものがあれば望外の喜びである.

参考文献

学習の手助けとなる参考文献をいくつか紹介する．下記の文献のうちのいくつかは，このノートを作成する際にも参考にさせてもらった．

[1] 一樂重雄「意味がわかる位相空間論」日本評論社.

[2] 内田伏一「集合と位相」裳華房.

[3] 斎藤毅 「集合と位相」東京大学出版会.

[4] 志賀浩二「位相への 30 講」朝倉書店.

[5] 瀬山士郎「『無限と連続』の数学」東京図書.

[6] ツァピンスキ・コップ (二宮・原訳)「測度と積分」培風館.

[7] 松坂和夫「集合・位相入門」岩波書店.

[8] 森田茂之「集合と位相空間」朝倉書店.

[9] 盛田健彦「実解析と測度論の基礎」培風館.

[10] 谷島賢二「ルベーグ積分と関数解析」朝倉書店.

[1] 及び [4] は，初学者向けの位相空間論のテキストであり，専門書と言うより読み物に近いスタイルで書かれたものである．標準的な位相空間論のテキストとして，[2]，[3]，[7] 及び [8] を挙げておく．これら以外にも数多くの文献が出版されているので，自分に合ったものを見つけてほしい．講義の後半で扱う位相空間論と解析学の繋がりに関して，[5] は非常に優れた文献である．また，位相空間論に続く分野として，関数解析や，本講義に続いて秋学期に開講される解析学 IIb で学習する測度・積分論が挙げられる．これら 2 つの分野を扱った文献として [10] がある．さらに，[6] と [9] は測度・積分論に関する大変優れたテキストであるが，残念なことに両書とも既に絶版である．

目 次

第1週　集合とは

集合とは，ある特定の性質を持った「もの」の集まりである．集合 A を構成する一つ一つの「もの」を集合 A の**元**または**要素**という．x が A の元であるとき，$x \in A$ または $A \ni x$ と書き，x が A の元でないとき，$x \notin A$ などと書く．a, d, f からなる集合を $\{a, d, f\}$ と書く．要素が無限にある場合は $\{2, 4, 6, \ldots\}$ と書く．さらに，ある条件 P をみたすもの x の全体として集合を定めるとき，$\{x | x$ は条件 P を満たす $\}$ と書く．

例 1.1 (1) 自然数の全体を表す集合は，$\mathbf{N}$ と記述される．つまり $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$ である．同様に，整数の全体は $\mathbf{Z}$，有理数は $\mathbf{Q}$，実数は $\mathbf{R}$，複素数は $\mathbf{C}$ と書かれる．よって，$1 \in \mathbf{N}$, $-1 \notin \mathbf{N}$，$-2 \in \mathbf{Z}$, $\pi \in \mathbf{R}$ などが成立する．
(2) $\{x | x$ は $x^2 - 1 = 0$ を満たす整数 $\} = \{-1, 1\}$
(3) 一方，$\{x | x$ は $x^2 + 1 = 0$ を満たす整数 $\}$ は元を一つも含まない集合である．このような集合を**空集合**といい，$\emptyset$ で表す．

二つの集合 A, B を考える．任意の A の元が B の元でもあるとき，A は B の**部分集合**であるといい，$A \subset B$ などと書く．A が B の部分集合でないとき，$A \not\subset B$ などと書く．また，$A \subset B$ かつ $B \subset A$ のとき，**A と B は等しい**といい，$A = B$ と書く．そうでないときは $A \neq B$ と書く．さらに，$A \subset B$ かつ $A \neq B$ であるとき，A は B の**真部分集合**であるといい，$A \subsetneq B$ などと書く．$A \subset A$ と $\emptyset \subset A$ はいつでも成立していることを注意する．集合 A の部分集合全体を 2^A と書き，A の**ベキ集合**と呼ぶ．つまり，$2^A = \{B | B$ は A の部分集合 $\}$ である．2^A のように要素が集合となる集合を**集合族**という．

注意 1.2 実数の区間は $\mathbf{R}$ の部分集合であることに注意する．例えば，

$$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} | a < x < b\}, \quad (a, b] = \{x \in \mathbf{R} | a < x \leq b\},$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x < b\}, \quad [a, b] = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x \leq b\}$$

である．(a, b) を**開区間**，$(a, b]$ や $[a, b)$ を**半開区間**，$[a, b]$ を**閉区間**という．

以後，A, B, C 及び $A_1, A_2, A_3, \ldots$ を集合とする．

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ または } x \in B\}$$

と定義し，**A と B の和集合**と呼ぶ．さらに，

$$\begin{aligned} A \cup B \cup C &= \{x | x \in A \text{ または } x \in B \text{ または } x \in C\}, \\ \bigcup_{i=1}^{n} A_i &= \{x | \text{ ある } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ が存在して } x \in A_i\}, \\ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i &= \{x | \text{ ある } i \in \mathbf{N} \text{ が存在して } x \in A_i\} \end{aligned}$$

などと定義する．同様にして

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

と定義し，A と B の**共通部分**と呼ぶ．さらに，

$$\begin{aligned} A \cap B \cap C &= \{x | x \in A \text{ かつ } x \in B \text{ かつ } x \in C\}, \\ \bigcap_{i=1}^{n} A_i &= \{x | \text{ 任意の } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ に対して } x \in A_i\}, \\ \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i &= \{x | \text{ 任意の } i \in \mathbf{N} \text{ に対して } x \in A_i\} \end{aligned}$$

などと定義する．$A \cap B \neq \emptyset$ のとき，A と B は**交わる**といい，$A \cap B = \emptyset$ のとき，A と B は**互いに素である**という．

命題 1.3 (1) $A \subset A \cup B$, $A \cup B = B \cup A$.
(2) $A \supset A \cap B$, $A \cap B = B \cap A$.
(3) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
(4) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

証明. 演習問題とする． □

集合 X を固定する．X の部分集合 A に対して，集合

$$\{x \in X | x \text{ は } A \text{ に属さない }\}$$

を A の **(X に関する) 補集合**といい，A^c と書く．二つの集合 A と B に対して，$A \cap B^c$ を A と B の**差集合**といい，$A - B$ または $A \backslash B$ などと書く．従って，$A^c = X - A$ である．さらに，$A \subset B$ ならば $A^c \supset B^c$ が成立する．

命題 1.4 (ド・モルガンの法則) (1) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
(2) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

証明. (1) の証明のみ紹介する．集合に関する等号を示すには，$(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$ であることと $(A \cap B)^c \supset A^c \cup B^c$ であることを別々に示すのが常套手段である．$(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$ であることを示す．$x \in (A \cap B)^c$ とする．つまり，$x \in X$ かつ $x \notin A \cap B$ である．$x \notin A \cap B$ ということは,「$x \in A$ かつ $x \in B$」でないということである．よって，$x \notin A$ であるか $x \notin B$ であるかである．従って，$x \in A^c \cup B^c$ が成立する．以上より，$(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$ を得る．次に，$(A \cap B)^c \supset A^c \cup B^c$ であることを示す．$x \in A^c \cup B^c$ とする．今，$x \in A^c$ としよう．つまり，$x \in X$ かつ $x \notin A$ である．よって，$x \in X$ かつ $x \notin A \cap B$ なので，$x \in (A \cap B)^c$ である．$x \in B^c$ としても同様に $x \in (A \cap B)^c$ を得る．以上より，$(A \cap B)^c \supset A^c \cup B^c$ を得る． □

集合列 $A_1, A_2, A_3, \ldots$ に対して，

$$\limsup_{i\to\infty} A_i = \bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k, \qquad \liminf_{i\to\infty} A_i = \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty} A_k$$

と定義し，それぞれ**上極限集合**，**下極限集合**という．さらに，$\limsup_{i\to\infty} A_i = \liminf_{i\to\infty} A_i$ であるとき，これを**極限集合**といい，それを $\lim_{i\to\infty} A_i$ と表す．集合列が $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ であるときは，$\lim_{i\to\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ であり，集合列が $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ であるときは，$\lim_{i\to\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ である．命題 1.4 より，次の命題を得る．

命題 1.5 $(\limsup_{i\to\infty} A_i)^c = \liminf_{i\to\infty} A_i^c$.

二つの「もの」x, y の対 (x, y) を**順序対**という．一般に $(x, y) = (y, x)$ は成立しない．$(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ とは，$x_1 = x_2$ かつ $y_1 = y_2$ のことである．二つの集合 A, B に対して，A の元と B の元から作られる順序対の全体 $\{(a, b) | a \in A, b \in B\}$ を A と B の**直積集合**といい，$A \times B$ と書く．さらに三つ以上の集合の直積集合も同様にして定義できる．次に，関係について論じる．集合 A と B の**関係**とは，部分集合 $R \subset A \times B$ のことであり，$a \in A$ と $b \in B$ に対して，$(a, b) \in R$ であるとき，a と b は R-関係にあるなどといい，aRb などと書く．特に，$R \subset A \times A$ が A における**同値関係**であるとは，

反射律: 任意の $a \in A$ に対して $(a, a) \in R$,

対称律: $(a_1, a_2) \in R$ ならば $(a_2, a_1) \in R$,

推移律: $(a_1, a_2) \in R$，$(a_2, a_3) \in R$ ならば $(a_1, a_3) \in R$,

の三つの条件をみたすときにいう．さらに，R が A の同値関係であるとき，各 $a \in A$ に対して，$[a] = \{a_1 \in A | (a, a_1) \in R\}$ は A の部分集合であるが，これを a の**同値類**という．

命題 1.6 (1) $(a_1, a_2) \in R \Leftrightarrow [a_1] = [a_2]$.
(2) $(a_1, a_2) \notin R \Leftrightarrow [a_1] \cap [a_2] = \emptyset$.

証明. (1),(2) 共に自明である． □

つまり，集合 A は同値関係 R によって互いに素な同値類の和集合として表すことができる．この同値類の全体を A/R と書き，A の R による**商集合**と呼ぶ．R の代わりに $\sim$ を用いて，$A/\sim$ と書くことも多い．

例 1.7 (1) $\mathbf{R}$ 上の同値関係を $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbf{Z}$ と定義する．ここから作られる商集合は $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ と書かれることが多い．
(2) X を線形空間，Y をその部分空間とする．$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Y$ と定義すると，関係 $\sim$ は同値関係になる．これを X/Y と書き，X の Y に関する**商空間**と呼ぶ．X/Y は，$[x_1] + [x_2] = [x_1 + x_2]$ や $[\alpha x] = \alpha[x]$ によって，線形空間になる．

第2週　有限と無限

集合 A の元に対して集合 B の元を一つずつ対応させる規則 f を集合 A から集合 B への**写像**または**関数**といい，$f : A \to B$ と書く．A を f の**定義域**といい，$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$ を**値域**という．但し，写像 f によって $x \in A$ が $y \in B$ に対応しているとき，y を x の f による**像**といい $f(x)$ と書く．

A, B, C を集合とし，二つの写像 $f : A \to B$ と $g : B \to C$ を考える．$x \in A$ の f による像 $f(x)$ のさらなる g による像 $g(f(x))$ を対応させる規則を f と g の**合成写像**といい，$g \circ f$ で表す．つまり，

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

である．

命題 2.1 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$

以後，しばらくは写像 $f : A \to B$ を考える．B の部分集合 B' に対して，

$$f^{-1}(B') = \{x \in A | f(x) \in B'\}$$

を f による B' の**逆像**という．

命題 2.2 A_1, A_2 と B_1, B_2 をそれぞれ A と B の部分集合とせよ．
(1) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2).$
(2) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$
(3) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$
(4) $f(f^{-1}(B_1)) \subset B_1.$

証明.　(2) を示す．

$$\begin{aligned} f^{-1}(B_1 \cup B_2) &= \{x \in A | f(x) \in B_1 \cup B_2\} \\ &= \{x \in A | f(x) \in B_1 \text{または} f(x) \in B_2\} \\ &= \{x \in A | x \in f^{-1}(B_1) \text{ または } x \in f^{-1}(B_2)\} \\ &= f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

次に (4) を示そう．$y \in f(f^{-1}(B_1))$ とせよ．このとき，$y = f(x)$ なる $x \in f^{-1}(B_1)$ が存在する．つまり，$f(x) \in B_1$ である．よって，$y \in B_1$.　□

任意の $y \in f(A)$ に対して，$x \in A$ が一意的に定まり $y = f(x)$ であるとき，つまり $f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$ であるとき，f を**単射**という．また，$B = f(A)$ であるとき，f を**全射**または**上への写像**という．f が単射かつ全射であるとき**全単射**という．f が単射であるとき，写像 $f^{-1} : f(A) \to A$ で，(1) $x \in A$ に対して $f^{-1}(f(x)) = x$，(2) $y \in f(A)$ に対して $f(f^{-1}(y)) = y$，

を満たすものが存在する．この f^{-1} を f の**逆写像**という．逆像と逆写像の違いに注意せよ．また，$f: A \to A$ が，任意の $x \in A$ に対して $f(x) = x$ を満たすとき，f は全単射写像であり，一般に**恒等写像**と呼ばれる．

二つの集合 A, B の間に全単射写像が存在するとき，A と B は**対等**であるといい，$A \sim B$ と書く．このとき A と B は同じ**濃度**を持つという．A の濃度を $|A|$ と書く．よって，$A \sim B$ であることと $|A| = |B|$ は同値である．大ざっぱにいえば，濃度とは集合に含まれる元の個数である．例えば，空集合の濃度は 0 である．つまり $|\emptyset| = 0$ である．集合 A が元を有限個しか含まないとき，つまり**有限集合**であるとき，ある自然数 $n \in \mathbf{N}$ が存在して $|A| = n$ である．このとき，明らかに $A \sim \{1, 2, \ldots, n\}$ である．

有限集合でない集合を**無限集合**というが，無限集合に対する濃度の取り扱いには注意が必要である．まず，自然数の全体 $\mathbf{N}$ の濃度を $\aleph_0$(アレフゼロ) で表す．集合 A が $A \sim \mathbf{N}$ であるとき，A を**可算**という．集合が有限または可算であるとき，**高々可算**という．

例 2.3 (1) $\mathbf{Z}$ は可算である．実際，$f(0) = 1$, $f(n) = 2n + 1$, $f(-n) = 2n$, $n \in \mathbf{N}$ とすればよい．
(2) $\mathbf{N}^2 \sim \mathbf{N}$ である．実際，自然数 m, n に対して，

$$f(m, n) = \frac{1}{2}(m + n - 2)(m + n - 1) + n$$

とすればよい．より一般に $\mathbf{N}^n \sim \mathbf{N}$ が成立する．但し，$\mathbf{N}^2 = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ であり，これは $\mathbf{N}$ と $\mathbf{N}$ の直積集合である．
(3) (2) から直ちに $\mathbf{Q} \sim \mathbf{N}$ が成立する．

$\mathbf{N}$ は $\mathbf{Z}$ の真部分集合であるにもかかわらず，$|\mathbf{N}| = |\mathbf{Z}|$ である．このようなことは有限集合では起こりえない無限集合の特徴である．

定理 2.4 無限集合は可算部分集合を含む．

証明． X を無限集合とする．X の元を一つとって x_1 とする．$X \backslash \{x_1\}$ も無限集合であり，その中から元を一つとってきてそれを x_2 とする．さらに，$X \backslash \{x_1, x_2\}$ から元を一つとり x_3 とする．このようにして帰納的に X の可算部分集合 $\{x_1, x_2, \ldots\}$ を得る．□

定理 2.5 可算集合の任意の部分集合は高々可算である．

証明． X を可算集合とする．従って，$X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ と表現できる．$Y \subset X$ とせよ．自然数 n に対して，$X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$ とおく．Y を無限集合として可算であることを示せば十分．$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$ であることに注意し

て，以下のように自然の単調増大列 $\{n_k\}$ を構成する:

$$\begin{aligned}
n_1 &= \min\{n \in \mathbf{N} | X_n \cap Y \neq \emptyset\}, \\
n_2 &= \min\{n \in \mathbf{N} | X_n \cap (Y \backslash \{x_{n_1}\}) \neq \emptyset\}, \\
n_3 &= \min\{n \in \mathbf{N} | X_n \cap (Y \backslash \{x_{n_1}, x_{n_2}\}) \neq \emptyset\}, \\
\cdots .
\end{aligned}$$

$Z = \{x_{n_k} | k \in \mathbf{N}\}$ とおくと，$Z \subset Y$ である．$Z \neq Y$ とする．このとき，$x_n \in Y \backslash Z$ なる x_n が存在する．ところが，任意の番号 k に対して $x_n \neq x_{n_k}$ なので，$n_k < n < n_{k+1}$ なる番号 k が取れる．これは n_{k+1} の取り方に矛盾する．よって $Z = Y$ となり，Y は可算である． □

定理 2.6 $\mathbf{R}$ は可算でない無限集合である．

証明. 対角線論法により示す．$f : (0,1) \to \mathbf{R}$ を $f(x) = \tan \pi (x - \frac{1}{2})$ と定義すると，f は全単射となる．従って，$I = (0,1)$ が可算でないことを示せば十分．I が可算であると仮定する．つまり，$I = \{x_1, x_2, \ldots\}$ と書ける．各 x_n を無限小数に展開する:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0.x_{11}x_{12}x_{13}\cdots, \\
x_2 &= 0.x_{21}x_{22}x_{23}\cdots, \\
x_3 &= 0.x_{31}x_{32}x_{33}\cdots, \\
\cdots .
\end{aligned}$$

このとき，自然数 k に対して y_k を

$$1 \leq y_k \leq 9,\ y_k \neq x_{kk},\ y_k \neq y_{k+1}$$

を満たすようにとり，

$$y = 0.y_1y_2y_3\cdots$$

とすると $y \in I$ である．しかし，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して，y の小数第 n 位は x_{nn} と異なるから $y \neq x_n$ である．これより $y \notin I$ となり矛盾． □

注意 2.7 (1) 上記で $x \in I$ を無限小数に展開するとき，x が 0.213 のような有限小数である場合には注意が必要である．ここでは，0.213 を 0.212999$\cdots$ のような展開を行うものとする．
(2) 実数全体 $\mathbf{R}$ の濃度を $\aleph$(アレフ) で表す．

第 3 週　数直線，平面と距離

数直線、つまり $\mathbf{R}$ の部分集合 A を考える．点 $x \in \mathbf{R}$ が A の**内点**であるとは，x を含み A に含まれる開区間 S_x が存在するときに言う．つまり，

$$x \in \mathbf{R} \text{ が } A \text{ の内点} \Longleftrightarrow x \in S_x \subset A \text{ なる開区間 } S_x \text{ が存在する},$$

である．実は，x が A の内点であるとき，S_x として x を中心とする開区間を取れる．つまり，十分小さな正数 $\varepsilon > 0$ が存在し，$x \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$ となる．開区間 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ を x の **ε-近傍**と呼び，$N(x,\varepsilon)$ と書く．$A \subset \mathbf{R}$ が空集合であるか，任意の $x \in A$ が A の内点であるとき，A を $\mathbf{R}$ 上の**開集合**という．開集合に関して，例と重要な性質と注意を与える．

例 3.1 (1) $\mathbf{R}$ 上の開集合の例: $\mathbf{R}$ 自身，$\emptyset$, 任意の開区間，(x,∞) や $(-\infty,x)$ などの無限開区間.
(2) 開集合でない例: 閉区間，半開区間，一点集合 $\{x\}$, $[x,\infty)$ や $(-\infty,x]$ などの無限閉区間，$\{1,1/2,1/3,\ldots\}$ など.

定理 3.2 (1) 任意個の開集合の和集合は再び開集合である.
(2) 有限個の開集合の共通部分は再び開集合である.

証明.　(2) 二つの場合を示せば十分．A_1 と A_2 を開集合とする．$A_1 \cap A_2$ が空ならば定理は成立．そこで，$A_1 \cap A_2$ が空でないとする．$x \in A_1 \cap A_2$ を任意に取る．このとき，$i=1,2$ に対して $x \in N_i \subset A_i$ なる開区間 N_i が存在する．$N_1 \cap N_2$ は x を含む開区間であり，$A_1 \cap A_2$ に含まれる．　□

注意 3.3 (1) 定理 3.2(1) における「任意個」とは，非可算の場合も含む.
(2) 開区間の列 $A_i = (-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}), i = 1,2,\ldots$ を考える．このとき，$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{0\}$ である．つまり，定理 3.2(2) において，有限個という条件は外せない.

開集合の補集合を**閉集合**という．従って，$\emptyset$ と $\mathbf{R}$ は $\mathbf{R}$ 上の開集合でもあり閉集合でもある．また，任意の閉区間，無限閉区間，一点集合も $\mathbf{R}$ 上の閉集合である．半開区間は開でも閉でもない．さらに，定理 3.2 とド・モルガンの法則から以下が成り立つ:
(1) 任意個の閉集合の共通部分は再び閉集合である.
(2) 有限個の閉集合の和集合は再び閉集合である.

例 3.4 $\{1,1/2,1/3,\ldots\}$ は閉集合でもない．もし閉集合ならば $\{1,1/2,1/3,\ldots\}^c$ は開である．ところが，$0 \in \{1,1/2,1/3,\ldots\}^c$ であるが，どんな小さな $\varepsilon > 0$ を取ってきても $N(0,\varepsilon) \cap \{1,1/2,1/3,\ldots\} \neq \emptyset$ であるから，$\{1,1/2,1/3,\ldots\}^c$ は開集合ではない.

次に平面 $\mathbf{R}^2$ 上の開集合を定義する．まず，中心 $x=(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$，半径 $\varepsilon>0$ の**開円盤**は

$$\{(y_1,y_2)\in\mathbf{R}^2|(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2<\varepsilon^2\}$$

で与えられることに注意する．点 $x\in\mathbf{R}^2$ が $A\subset\mathbf{R}^2$ の内点であるとは，x を含み A に含まれる開円盤が存在するときに言う．ここから $\mathbf{R}^2$ 上の開集合，閉集合が数直線の場合と同様に定義される．従って，数直線の場合とまったく同様に，空集合と平面全体 $\mathbf{R}^2$ は開かつ閉である．さらに任意の開円盤は開集合，円周も含む閉円盤は閉集合になる．中心 x，半径 $\varepsilon>0$ の開円盤を点 x の ε-近傍といい $N(x,\varepsilon)$ で表す．x が A の内点であるとき，$x\in N(x,\varepsilon)\subset A$ をみたす $\varepsilon>0$ が存在する．証明なしで次の命題を紹介する:

命題 3.5 $\mathbf{R}^2$ 上の開集合は高々可算個の開円盤の和集合で表される．

ここまでの議論は n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ へそのまま拡張できる．n 次元空間で開集合を定義するには，2 次元における開円盤に相当する**開球**を定義しなければならない．まず，二つの点 $x,y\in\mathbf{R}^n$ の距離は，以下のように定義される $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ 上の非負実数値関数 $d^{(n)}(x,y)$ である:

$$d^{(n)}(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}.$$

但し，$x=(x_1,\ldots,x_n), y=(y_1,\ldots,y_n)$ である．従って，中心 $x\in\mathbf{R}$，半径 ε の開球，つまり x の ε-近傍 $N^{(n)}(x,\varepsilon)$ は $\{y\in\mathbf{R}^n|d^{(n)}(x,y)<\varepsilon\}$ で与えられる．これを用いて内点，開集合が 2 次元の場合と同様にして定義される．ここで，$d^{(n)}$ について以下の定理が成立する．

定理 3.6 $d^{(n)}$ は以下の三つの条件を満たす．
(1) 任意の $x,y\in\mathbf{R}^n$ に対して $d^{(n)}(x,y)\geq 0$，かつ，「$d^{(n)}(x,y)=0$ であること」と「$x=y$ であること」は同値である．
(2) 任意の $x,y\in\mathbf{R}^n$ に対して $d^{(n)}(x,y)=d^{(n)}(y,x)$．
(3) 任意の $x,y,z\in\mathbf{R}^n$ に対して $d^{(n)}(x,y)\leq d^{(n)}(x,z)+d^{(n)}(z,y)$．

証明． (3) のみ示せば十分であろう．そのために一つ補題を準備しておく．

補題 3.7 (コーシー・シュワルツの不等式) 任意の $2n$ 個の実数 $a_1,\ldots.a_n,b_1,\ldots,b_n$ に対して

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)$$

が成立する．

証明.　$0 \le \sum_{i=1}^n (a_i - tb_i)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 - 2t\sum_{i=1}^n a_i b_i + t^2 \sum_{i=1}^n b_i^2$ が任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して成立する．あとは 2 次方程式の判別式を用いればよい．□

定理 3.6 の証明に戻る．$x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n), z = (z_1, \ldots, z_n)$ とおく．$a_i = x_i - y_i, b_i = y_i - z_i$ とおく．$a_i + b_i = x_i - z_i$ であることとコーシー・シュワルツの不等式から

$$\begin{aligned}
\left(d^{(n)}(x,z)\right)^2 &= \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2\sum_{i=1}^n a_i b_i \\
&\le \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2} \\
&= \left(d^{(n)}(x,y) + d^{(n)}(y,z)\right)^2
\end{aligned}$$

を得る．□

特に，(3) を**三角不等式**という．関数 $d^{(n)} : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ は n 次元ユークリッド空間の常識的な意味での 2 点間の距離を表している．従って，$d^{(n)}$ を**通常の距離**と呼ぶ．一方，一般の集合 X の上に 2 点間の距離を定義しようとしても，常識的な意味での距離という概念は一般には存在しない．そこで，通常の距離が持っている性質のうちのいくつかを抜き出して，それらの性質を持っているものをすべて距離として扱うことにする．このとき，後々議論する関数の連続性や点列の収束等において，ユークリッド空間上で成立していることが抽象的な距離を導入した空間でも成立するように，距離を定義しなくてはならない．実は，定理 3.6 の三つの条件は，抽象的な意味での距離が持つべき必要最小限の性質なのである．そこで，X を集合としたときに，定理 3.6 の三つの条件を満たす関数 $X \times X \to \mathbf{R}$ を**距離**または**距離関数**といい，集合 X と距離 d の組 (X, d) を**距離空間**という．

例 3.8 (n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ 上の距離)　上記で紹介した通常の距離 $d^{(n)}$ 以外に，以下の二つの関数も $\mathbf{R}^n$ 上の距離である:

$$d_1^{(n)}(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \quad d_2^{(n)}(x,y) = \max_{1 \le i \le n}\{|x_i - y_i|\}.$$

但し，$x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ である．また，

$$d_3^{(n)}(x,y) = \sum_{i=1}^{n-1} |x_i - y_i| + 1_{\{x_n \ne y_n\}}$$

も距離である．但し，$1_{\{x_n \ne y_n\}}$ は，$x_n \ne y_n$ のとき 1 で，そうでないとき 0 となる関数とする．$n = 2$ における原点の $\frac{1}{2}$-近傍は $\{(x_1, 0) : -\frac{1}{2} < x_1 < \frac{1}{2}\}$ となり，近傍のイメージからかけ離れたものとなる．このように距離という概念を抽象化することにより直観に反するような距離も存在するのである．

第 4 週　距離から位相へ

まず距離空間の具体例をいくつか紹介することから始める．

例 4.1 (連続関数空間上の距離) 閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数の全体を $C[0,1]$ と書く．ここではまだ連続関数の定義を与えていないが，$C[0,1]$ 上の距離を考える．$f,g \in C[0,1]$ に対して

$$
\begin{aligned}
d_1(f,g) &= \int_0^1 |f(x)-g(x)|dx, \\
d_2(f,g) &= \max\{|f(x)-g(x)|; x \in [0,1]\}
\end{aligned}
$$

は共に $C[0,1]$ 上の距離である．正確な議論を行うためには，ルベーグ積分論，商空間及び一様連続性などの諸概念が必要となるのでここでは割愛する．

例 4.2 直観的感覚からずれた極端な例もある．集合 X に対して関数 d を

$$
d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \text{ のとき}, \\ 0, & x = y \text{ のとき} \end{cases}
$$

と定義すると，(X,d) は距離空間である．これを**自明な距離**と呼ぶ．

例 4.3 (X,d) を距離空間とする．このとき，

$$
d_1(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}, \quad d_2(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}
$$

とおくと，$(X,d_1),(X,d_2)$ は共に距離空間である．

(X,d) を距離空間とする．$x \in X$ と X の部分集合 $A,B(\neq \emptyset)$ に対して

$$
\begin{aligned}
d(x,A) &= \inf\{d(x,a)|a \in A\}, \\
d(A,B) &= \inf\{d(a,b)|a \in A, b \in B\}, \\
d(A) &= \sup\{d(x,y)|x,y \in A\}
\end{aligned}
$$

と定義する．特に，$d(A)$ を A の**直径**といい，$d(A) < \infty$ であるとき A は**有界**であるという．点 $x \in X$ を中心とした半径 $\varepsilon > 0$ の**開球** $N(x,\varepsilon)$ を

$$
N(x,\varepsilon) = \{y \in X | d(x,y) < \varepsilon\}
$$

と定義する．この $N(x,\varepsilon)$ を x の **ε-近傍**ともいう．$A \subset X$ を考える．$x \in A$ が A の**内点**であるとは，$N(x,\varepsilon) \subset A$ となるような $\varepsilon > 0$ が存在するときにいう．A の内点の全体を**内部**といい，A° と書く．A が空集合であるか任意の $x \in A$ が A の内点であるとき，A を開集合という．A の補集合が開集合であるとき A を閉集合という．

注意 4.4 A が開集合であることの必要十分条件は $A = A^\circ$ である．一方，如何なる A に対しても A° は開集合である．この事実は自明であるように思えるがそうではない．$x \in A^\circ$ を取ってきたとき，x は A の内点であるから，$N(x,\varepsilon) \subset A$ となる $\varepsilon > 0$ が存在する．しかし，ここでは x が A° の内点であること，つまり $N(x,\varepsilon) \subset A^\circ$ を示さなくてはならないのである．

A^c の内点を A の**外点**という．内点でも外点でもない点を**境界点**という．さらに，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $N(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ となる点 x を A の**触点**という．触点の全体を A の**閉包**といい $\overline{A}$ と書く．x が $A - \{x\}$ の触点であるとき，x を A の**集積点**といい，その全体を A の**導集合**と呼ぶ．尚，A の集積点は必ずしも A に属すとは限らない．また，A の集積点でない A の点を**孤立点**という．

定理 4.5 (1) A の閉包 $\overline{A}$ は，A を含む最小の閉集合である．また，$\overline{A}$ の点は A の集積点であるか孤立点であるかのどちらかである．
(2) $\overline{A} = \{x \in X | d(x,A) = 0\}$.
(3) A が閉集合 $\Longleftrightarrow A = \{x \in X | d(x,A) = 0\}$.

証明． (1) $A \subset \overline{A}$ は明らか．定義から $\overline{A}$ の補集合は A の外点の全体，つまり $(\overline{A})^c = (A^c)^\circ$ である．上記の注意 4.4 より $\overline{A}$ は閉集合となる．今，$B \supset A$ を閉集合とする．点 $x \in B^c$ は A の外点となることから，$B \supset \overline{A}$ が成立する．後半の主張は定義より明らか．
(2) $x \in \overline{A}$ が孤立点であるとき，$d(x,A) = 0$ となる．一方，集積点であるならば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $N(x,\varepsilon) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$ となる．従って，$d(x,A) < \varepsilon$．$\varepsilon > 0$ は任意だから $d(x,A) = 0$ となる．次に，$d(x,A) = 0$ となる $x \in X$ を任意に取ってくる．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $N(x,\varepsilon) \cap A$ は空でない．従って，x は A の点であるか集積点であるかのどちらかである．
(3) (1),(2) より明らか． □

例 3.8 で紹介した距離 $d_1^{(n)}$ と $d_2^{(n)}$，それから通常の距離 $d^{(n)}$ を $n = 2$ の場合に考察しよう．$x \in \mathbf{R}^2$ の $d^{(2)}$ による ε-近傍は，x を中心とした半径 ε の円になる．$d_1^{(2)}$ の場合は x で対角線が交わるひし形になる．正確には正方形だが，対角線が軸に平行になるという意味でひし形とする．さらに $d_2^{(2)}$ の場合は x で対角線が交わり，各辺が軸に平行となる正方形である．ε を適当に入れ替えることにより，円に内接または外接するようにひし形や正方形を描ける．また，ひし形と正方形同士も互いに内接または外接するように取れる．このことにより，x が集合 A の内点であるかどうかは，$d^{(2)}, d_1^{(2)}, d_2^{(2)}$ を考えている限り，距離の取り方によらない．距離空間上の開集合全体，それを**開集合族**という，を考えると，これら三つの距離空間は同じ開集合族を生成する．関数の連続性や点列の収束を議論するに当たり，それらの定義を開集合を用いて与える．そこで，開集合族だけに着目した構造を導入するために，開集合族の抽象化を以下のように行う．鍵となるのは定理 3.2 である．

定義 4.6 X を空でない集合，$\mathcal{U}$ を以下の三つの条件をみたす X の部分集合からなる族とする: (1) $\emptyset, X \in \mathcal{U}$, (2) $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ ならば $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$, (3) $\mathcal{U}$ の元からなる任意の集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{U}$. Λ はインデックス集合であり，非可算であっても良い．このとき，$\mathcal{U}$ を**開集合系**といい，$(X,\mathcal{U})$ を**位相空間**という．また，$\mathcal{U}$ の各要素 $U \in \mathcal{U}$ を**開集合**という．

ここで位相空間の例をいくつか挙げよう．

例 4.7 (1) 距離空間 (X, d) において，$\mathcal{U}$ としてその開集合族を取ると，$(X,\mathcal{U})$ は位相空間となる．これを**距離 d が定める位相**という．$\mathbf{R}^n$ において，三つの距離 $d_1^{(n)}$，$d_2^{(n)}$ と $d^{(n)}$ は同一の位相を定める．但し，$d_3^{(n)}$ の定める位相は異なる．
(2) 集合 X に対して $\mathcal{U} = \{\emptyset, X\}$ と取ると，$(X,\mathcal{U})$ は位相空間となる．これを**密着位相**という．
(3) $\mathcal{U} = 2^X$ としても開集合系となる．これを**離散位相**という．
(4) 二つの開集合系 $\mathcal{U}_1$ と $\mathcal{U}_2$ に対して，$\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ は再び開集合系となる．
(5) $X = \{a, b, c, d, e\}$ とする．

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_1 &= \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\},\\ \mathcal{U}_2 &= \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\},\end{aligned}$$

とするとき，$\mathcal{U}_1$ は開集合系であるが，$\mathcal{U}_2$ は開集合系ではない．
(6) $(X,\mathcal{U})$ を位相空間とし，空でない $A \subset X$ を考える．$\mathcal{U}_A = \{A \cap U | U \in \mathcal{U}\}$ とすると，$(A,\mathcal{U}_A)$ は位相空間となる．これを**部分空間**といい，この位相を**相対位相**という．例えば，$\mathbf{R}$ に通常の位相を入れた場合を考えよう．$A = [0, 2]$, $U = (-1, 1)$ とすると，$U \cap A = [0, 1)$ は部分位相空間では開集合となる．しかし，$\mathbf{R}$ 上では開集合とはならない．

注意 4.8 X 上の二つの開集合系 $\mathcal{U}_1$ と $\mathcal{U}_2$ が $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$ をみたすとき，$\mathcal{U}_1$ は $\mathcal{U}_2$ より**弱い位相**であるという．このとき，$\mathcal{U}_2$ は $\mathcal{U}_1$ より**強い位相**であるともいう．密着位相は最も弱い位相であり，離散位相は最も強い位相である．

開集合系の代わりに**閉集合系**を定義して位相空間を定義することができる．$\mathcal{F}$ が空でない集合 X の閉集合系であるとは，
(1) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$,
(2) $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ ならば $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$,
(3) $\mathcal{F}$ の元からなる任意の集合族 $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}$
をみたすときにいう．このとき，明らかに集合族 $\{F^c | F \in \mathcal{F}\}$ は開集合系である．逆に，$\mathcal{U}$ が開集合系であるとき，$\{U^c | U \in \mathcal{U}\}$ は閉集合系となる．この意味で，開集合系と閉集合系は一対一に対応している．

第 5 週　関数の連続性

距離空間において点 x が集合 A の内点であるとは，十分小さな $\varepsilon > 0$ をとれば ε-近傍 $N(x,\varepsilon)$ が A に含まれることであった．$N(x,\varepsilon)$ は，x を中心とする半径 ε の開球であるから，x の周り全てを含む．別の言い方をすれば，点 x に近づくためには $N(x,\varepsilon)$ を通らなければならない．実は,「近傍」とはある点の周り全てを含む集合という意味合いがある．逆に，A が開集合とは，どの点 $x \in A$ を取ってきてもその周辺が A に含まれる集合ということになる．つまり，開集合 A は A に属す全ての点の近傍になっている．そこで，位相空間にも「近傍」という概念を導入したい．

定義 5.1 $(X,\mathcal{U})$ を位相空間とする．集合 N が $x \in X$ の**近傍**であるとは，ある開集合 $U \in \mathcal{U}$ が存在して $x \in U \subset N$ をみたすときにいう．点 x の近傍全体を $\mathcal{N}(x)$ と書き，点 $x \in X$ の**近傍系**という．各点での近傍系を集めた集合 $\{\mathcal{N}(x)\}_{x\in X}$ を改めて近傍系と呼ぶこともある．

遠くの点から x に近づくとき，N を通らずに近づくことができないことを意味している．位相空間における近傍は，ε-近傍とは違い，周辺の点をすべて含んでいれば良いので，どんな大きな集合でも構わない．このことは，近傍という言葉のイメージとはかけ離れている．例えば，全体集合 X は任意の点 $x \in X$ の近傍である．近傍系に関して以下の命題が成立する．

命題 5.2 $\{\mathcal{N}(x)\}_{x\in X}$ を近傍系とする．任意の x に対して以下が成立する:
(1) $N \in \mathcal{N}(x)$ ならば $x \in N$,
(2) $N \in \mathcal{N}(x), N \subset M$ ならば $M \in \mathcal{N}(x)$,
(3) $N, M \in \mathcal{N}(x)$ ならば $N \cap M \in \mathcal{N}(x)$,
(4) 任意の $N \in \mathcal{N}(x)$ に対してある $M \in \mathcal{N}(x)$ が存在して，$y \in M$ ならば $N \in \mathcal{N}(y)$ が成立.

証明． (4) のみ示せば十分．$N \in \mathcal{N}(x)$ であるとき，ある $U \in \mathcal{U}$ が存在して，$x \in U \subset N$ となる．M としてこの U を取ればよい． □

実は，開集合系を使わずに近傍系から位相空間を定義することもできる．命題5.2の四つの条件をみたす X の部分集合族 $\{\mathcal{N}(x)\}_{x\in X}$(正確には集合族の集合) が与えられたとき，$\{\mathcal{N}(x)\}_{x\in X}$ を X の近傍系といい，組 $(X, \{\mathcal{N}(x)\}_{x\in X})$ を位相空間という．つまり，位相空間の定義には開集合系，閉集合系，近傍系による三通りの方法がある．どの方法で定義しても同じであることを確認しなければならない．上記では開集合系から位相が定義されたときの近傍の定義を与えた．つまり，開集合系が最初に与えられ，そこから近傍系を構成する方法を示した．今度は近傍系が与えられたときの開集合の定義を与える．

定義 5.3 $(X, \{\mathcal{N}(x)\}_{x\in X})$ を近傍系による位相空間とする．このとき，集合 $U \subset X$ が開集合であるとは，任意の $x \in U$ に対して $U \in \mathcal{N}(x)$ をみたすときにいう．

このように定義された開集合の全体を $\mathcal{U}$ と書くと，$\mathcal{U}$ は開集合系の三条件をみたすことが簡単に確認できる．よって，近傍系が最初に与えられても，そこから開集合系を構成することもできるのである．つまり，位相を定義する際には何から定義しても結局は同じである．集合 X 上に開集合系 $\mathcal{U}$ が与えられ，定義 5.1 を通じて近傍系 $\{\mathcal{N}(x)\}_{x\in X}$ を構成し，さらにこの $\{\mathcal{N}(x)\}_{x\in X}$ から定義 5.3 に従い開集合系を構成すると，再び元の $\mathcal{U}$ が得られるのである．

関数の連続性について，所謂 ε-δ 論法を用いた定義の復習から始める．

定義 5.4 関数 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ が点 $x_0 \in \mathbf{R}$ で**連続**であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して，$x \in \mathbf{R}$ が $|x - x_0| < \delta$ をみたすならば $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ なるときにいう．これを以下のように書き換える:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0; x \in N(x_0, \delta) \Longrightarrow f(x) \in N(f(x_0), \varepsilon).$$

ここで，$N(x, \varepsilon)$ は $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ であることに注意しよう．ある点における関数の連続性は近傍の言葉で定義される．これを少し一般化しよう．

定義 5.5 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を二つの距離空間とする．$f : X \to Y$ が点 $x_0 \in X$ で連続であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$x \in N_X(x_0, \delta)$ ならば $f(x) \in N_Y(f(x_0), \varepsilon)$ となる $\delta > 0$ が存在するときにいう．尚，N_X, N_Y はそれぞれ距離空間 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ 上の開球である．以下のように書き換えられる:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0; N_X(x_0, \delta) \subset f^{-1}(N_Y(f(x_0), \varepsilon))$$

これより位相空間上の関数のある点における連続性を以下のように定義する:

定義 5.6 X, Y を位相空間とし，関数 $f : X \to Y$ が点 $x_0 \in X$ で連続であるとは，任意の $N_Y \in \mathcal{N}_Y(f(x_0))$ に対して $f^{-1}(N_Y) \in \mathcal{N}_X(x_0)$ をみたすときにいう．ただし，$\mathcal{N}_X, \mathcal{N}_Y$ はそれぞれ X, Y の近傍系である．

関数 f が x で**点列連続**であるとは，x に収束する任意の点列 $\{x_n\}$ に対して，$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ が成立するときにいう．f が x で連続ならば x で点列連続であるが，一般にこの逆は成立しない．$X = Y = \mathbf{R}$ とする．$\mathcal{U} = \{U | U^c \subset X \text{ は可算 }\} \cup \{\emptyset\}$ とすると $(X, \mathcal{U})$ は位相空間となる．これを**補可算位相**という．また，Y には通常の位相を入れ，f を恒等写像とすると点列連続であるが，$f^{-1}((a, b)) = (a, b)$ であり，(a, b) は如何なる開集合も含まないから，f は連続性を持たない．これについては第 6, 7 週でも触れる．

重要な点は，関数のある点における連続性は近傍を使って定義されるということである．近傍という概念は，ある点の周辺の性質、つまり局所的な性

質を述べる際に用いられる．一方，開集合は大域的概念である．このことが意味することを理解するために以下の定理を示そう．

定理 5.7 X, Y を位相空間とする．関数 $f : X \to Y$ に関して以下の四条件は同値である:
(1) f は X 上の全ての点で連続である．
(2) Y の任意の開集合 U に対して，$f^{-1}(U)$ は X の開集合である．
(3) Y の任意の閉集合 F に対して，$f^{-1}(F)$ は X の閉集合である．
(4) 任意の部分集合 $A \subset X$ に対して，$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ である．

証明． (1) と (2) の同値性だけ示そう．残りについては内田 [2] の定理 16.4 を参照せよ．(1) が成り立っているとする．U_Y を Y の空でない開集合とする．$f^{-1}(U_Y) = \emptyset$ ならば，$f^{-1}(U_Y)$ は X の開集合である．$f^{-1}(U_Y)$ が空でないとする．U_Y は，U_Y に属す任意の点の近傍になっている．従って，$x \in f^{-1}(U_Y)$ を任意に取ると，$f(x) \in U_Y$ であり，U_Y は Y における $f(x)$ の近傍であるから，$f^{-1}(U_Y)$ は x の近傍である．x の任意性から $f^{-1}(U_Y)$ は開集合であり，(2) が成立する．次に (2) を仮定する．$x \in X$ と $N_Y \in \mathcal{N}_Y(f(x))$ を任意に取る．このとき，$f(x) \in U_Y \subset N_Y$ を満たす Y 上の開集合 U_Y が存在する．$f^{-1}(U_Y)$ は X の開集合であり，$x \in f^{-1}(U_Y)$ であるから $f^{-1}(U_Y)$ は x の近傍である．よって，f は x で連続である． $\square$

単に「関数が連続」という場合は，すべての点で連続であることを表す．ある点での連続性と違い，この場合の連続性は関数の大域的な性質である．大域的な性質を議論するには開集合を用いるのが一般的である．実際，定理 5.7 より位相空間上の関数の連続性は開集合を用いて以下のように定義される:

定義 5.8 X, Y を位相空間とし，関数 $f : X \to Y$ が**連続**であるとは，Y の任意の開集合 U に対して，$f^{-1}(U)$ は X の開集合であるときにいう．

注意 5.9 (1) X が離散位相であるか Y が密着位相であれば，どんな関数 $f : X \to Y$ も連続となる．
(2) X, Y, Z を位相空間とし，$f : X \to Y, g : Y \to Z$ を連続関数とする．このとき，合成関数 $g \circ f$ も連続である．

二つの位相空間 X, Y において，写像 $f : X \to Y$ が**同相写像**であるとは，全単射かつ連続で逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ も連続であるときにいう．X, Y の間に同相写像が存在するとき，X, Y は**同相**であるという．同相は位相空間を分類するときに用いられる．例えば $\mathbf{R}^3$ において，球は空間全体と同相であるが，球とドーナツは同相でない．一般に開集合の連続写像による像は開集合とは限らないが，同相写像による像は開集合になる．このことを同相写像は**開写像**であるという．

第 6 週　点列の収束

ε-N 論法を用いた実数列の収束の定義から始める．

定義 6.1 実数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ がある実数 y に**収束**するとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある番号 $N \in \mathbf{N}$ が存在し，$n \geq N$ ならば $|x_n - y| < \varepsilon$ が成り立つときにいう．$x_n \to y (n \to \infty)$ などと書き，y を $\{x_n\}$ の**極限**という．

この定義は距離空間まで自然に拡張できる．また，この定義を ε-近傍で書き直すと，$x_n \to y (n \to \infty)$ であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\text{有限個の } n \in \mathbf{N} \text{ を除いて } x_n \in N(y, \varepsilon)$$

が成り立つことである．さらに開集合を使って書き換えると,「U が y を含む開集合であるとき，有限個の $n \in \mathbf{N}$ を除いて $x_n \in U$」となる．つまり，収束の定義を位相空間まで広げることが可能となる．つまり、$(X, \mathcal{U})$ を位相空間とするとき，$x_n \to y (n \to \infty)$ であるとは，

$$U \in \mathcal{U} \text{ に対して}, y \in U \text{ ならば，有限個を除いて } x_n \in U$$

が成り立つことである．近傍を使っても同様に定義できることに注意する．

例 6.2 (1) 密着位相空間，つまり $\mathcal{U} = \{\emptyset, X\}$ であるとき，任意の点列は任意の点に収束している．
(2) 離散位相空間，つまり $\mathcal{U} = 2^X$ を考える．点列 $\{x_n\}$ が y に収束しているならば，有限個を除いて $x_n = y$ である．
(3) X 上の二つ開集合系 $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ を考える．$\mathcal{U}_1$ の方が弱い，つまり $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$ とするとき，点列 $\{x_n\}$ が y に $\mathcal{U}_2$ に関して収束しているならば，$\mathcal{U}_1$ に関しても収束している．

　ここで改めて，位相空間における内点や集積点を定義する．$(X, \mathcal{U})$ を位相空間とし，$\mathcal{N}(x)$ を $x \in X$ の近傍系とする．$A \subset X$ に対し，$x \in A$ が A の**内点**であるとは，$N \subset A$ となる $N \in \mathcal{N}(x)$ が存在するときにいう．任意の $N \in \mathcal{N}(x)$ に対して $N \cap A \neq \emptyset$ であるとき，x を A の**触点**という．x が $A - \{x\}$ の触点であるとき，x を A の**集積点**という．尚，**内部**，**外点**，**境界点**，**閉包**，**導集合**，**孤立点**は距離空間の場合と同様に定義される．定理 4.5 と同様の定理が示せる．

定理 6.3 (1) A の閉包 $\overline{A}$ は，A を含む最小の閉集合である．また，$\overline{A}$ の点は A の集積点であるか孤立点であるかのどちらかである．
(2) A が閉集合 $\iff \overline{A} = A$.

証明.　(1) は定理 4.5(1) と同様に示せる．(2) は (1) と定義より明らか．□

以下の定理は重要である．

定理 6.4 位相空間 X と $A \subset X$ に対して以下が成立する．
(1) $x \in X$ に収束する A 内の点列 (点列の各項が A に属す点列) が存在するならば，$x \in \overline{A}$ である．特に，x に収束する A 内の点列で全ての項が x と異なるものが取れるならば，x は集積点である．
(2) A が閉集合ならば，任意の A 内の収束列は A 内に極限を持つ．

証明． (1) $x \notin \overline{A}$ を任意に取る．x は A の外点なので，x の近傍 N で $N \cap A = \emptyset$ となるものが存在する．従って，x に収束する任意の点列は，有限個の項を除いて N に属す．つまり，x に収束する A 内の点列は存在しない．次に，二番目の主張を示す．$\overline{A}$ は A の集積点と孤立点からなる．そこで，x を A の孤立点とする．よって，x の近傍 N で $N \cap (A - \{x\}) = \emptyset$ となるものが存在する．ゆえに，x に収束する $A - \{x\}$ 内の点列は存在しない．
(2) A を閉集合とする．A 内の収束列 $\{x_n\}$ でその極限 y が A^c に属すものが存在するとしよう．A^c は開集合だから，y は A^c の内点である．つまり，y の近傍で A^c に含まれるものが取れる．有限個を除いた $\{x_n\}$ の項はこの近傍に含まれるので，$\{x_n\}$ の各項が A に含まれることに反する． □

注意 6.5 (1) 距離空間を考えると，定理 6.4 の逆の命題も成り立つ．(X, d) を距離空間とする．まず定理 6.4(1) の逆を示す．x を $A \subset X$ の集積点とする．x の任意の ε-近傍 $N(x, \varepsilon)$ は $A - \{x\}$ と共通部分を持つので，例えば，$N(x, 1) \cap (A - \{x\})$ は空でない．よって，$x_1 \in N(x, 1) \cap (A - \{x\})$ が取れる．次に，$\varepsilon_2 = d(x, x_1)/2$ とし，$N(x, \varepsilon_2) \cap (A - \{x\})$ から x_2 を取る．同様に，$\varepsilon_3 = d(x, x_2)/2$ とし $N(x, \varepsilon_3) \cap (A - \{x\})$ から x_3 を取る．以下これを繰り返し，点列 $\{x_n\}$ を構成すると，$x_n \to x$ であり，各 x_n は x と異なる．一方，x が A の孤立点であるときは，点列 $x, x, x, \dots$ を考えればよい．さらに，定理 6.4(2) の逆については，A を閉集合でない X の部分集合とする．従って，A^c は開でない．従って，ある $x \in A^c$ で内点でないものが取れる．つまり，任意の $\varepsilon > 0$ に対して x の ε-近傍 $N(x, \varepsilon)$ は $N(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ をみたす．従って，x に収束する A 内の点列が存在する．
(2) 一般の位相空間を考えると，定理 6.4 の各命題の逆は必ずしも成立しない．反例を紹介しよう．但し，議論の詳細は省く．X を無限集合とし，$(X, \mathcal{U})$ を補可算位相空間とする．つまり，$\mathcal{U} = \{U | U^c \text{は可算}\} \cup \{\emptyset\}$ とする．補可算位相における収束列 $\{x_n\}$ は，y を極限とするならば，$x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, y, y, y, \dots$ のような形を取る．X として $\mathbf{R}$ を取り $A = \mathbf{Z}^c$ とすると，A は開集合であるが閉集合ではない．収束列の構造から，A 上の収束列の極限は必ず A に含まれるが，A は閉集合でない．よって定理 6.4(2) の逆は成立しない．さらに $\overline{A} = \mathbf{R}$ に注意すると，定理 6.4(1) の逆も成立しないことがわかる．
(3) 「点 x が A の集積点である」ことのイメージは，x が A 内のある点列の極限になっていることであり，定理 6.4(1) の逆が成り立たないことは，何と

なく直観からはずれている印象を持つ．さらに，閉集合の代表例は閉区間であり，閉集合のイメージというのは「収束列の極限について閉じている集合」であるといえる．一般の位相空間まで拡げて考えると定理 6.4 の逆命題は成立しないのであるが，(1) で見たように距離空間では成立する．では、一般の位相空間に対して逆命題が成り立つための条件は何であろうか．このことについては次週議論することにしよう．

実数列に関してはもう少し掘り下げる必要があるが，これは実数の連続性と深く関わってくるので，週を改めて詳しく述べることにする．ここでは，準備としてコーシー列を紹介し，その性質について議論する．

定義 6.6 実数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が**コーシー列**であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し，$n, m \geq N$ ならば $|x_n - x_m| < \varepsilon$ であるときにいう．

命題 6.7 実数列に関して，以下が成立する:
(1) 収束列はコーシー列である．
(2) コーシー列は有界列である．
(3) コーシー列の部分列が y に収束すれば，コーシー列自身も y に収束する．
(4) コーシー列は収束列である．

証明． (1) $\{x_n\}$ が y に収束しているとする．$\varepsilon > 0$ とせよ．$n \geq N$ ならば $|x_n - y| < \varepsilon/2$ となる番号 $N \in \mathbf{N}$ が取れる．従って，任意の $n, m \geq N$ に対して $|x_n - x_m| \leq |x_n - y| + |x_m - y| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ が成立する．
(2) $\{x_n\}$ をコーシー列とすると，任意の $n, m \geq N$ に対して $|x_n - x_m| < 1$ となる番号 N が取れる．特に，$m = N$ とすると $x_N - 1 < x_n < x_N + 1$ を得る．以上より，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して，$\min\{x_1, \dots, x_N, x_N - 1\} \leq x_n \leq \max\{x_1, \dots, x_N, x_N + 1\}$ が成立する．
(3) $\{x_n\}$ をコーシー列とし，部分列 $\{x_{i_k}\}$ は y に収束するものとする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$n, m \geq N$ ならば $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$ となる番号 N が存在する．また，$i_K \geq N$ を満たす番号 K が取れて $|x_{i_K} - y| < \varepsilon/2$ となる．よって，$n \geq N$ ならば $|x_n - y| \leq |x_n - x_{i_K}| + |x_{i_K} - y| < \varepsilon$ となり，$\{x_n\}$ は y に収束する．
(4) 定理 9.5 と (2),(3) から成立する． □

命題 6.7 において，(1) は距離空間上のコーシー列に対しても成立する．しかし，(4) はいつでも成立するとは限らない．一般に，集合 A 上のコーシー列がいつでも A 内に収束するとき，A を**完備**であるという．$\mathbf{R}$ や $[0,1]$ は完備であるが，$(0,1)$ は完備でない．また，$\sqrt{2}$ に収束する有理数列 $1, 1.4, 1, 41, \dots$ を考えれば，$\mathbf{Q}$ も完備でないことがわかる．

第 7 週　可算公理と分離公理

定理 6.4(1) と (2) の逆命題に加えて，以下の二つの命題を考える:
(a) 収束列の極限は一意である．
(b) 点列連続な関数は連続である．
これら四つの命題は直観的には成立しそうである．実際，距離空間では成立する．ところが，一般の位相空間では必ずしも成立するとは限らない．(a) は密着位相では成立しない．位相空間上で関数の連続性や点列の収束について議論する際，これら四つの命題が成立しないと不便なことも多い．そこで，どのような条件があれば位相空間上でもこれらの命題が成立するかを議論したい．そして，そのために必要な様々な概念を紹介することを今週の目的とする．また，ここでの議論を通して，数直線や距離空間を扱っている限り直観的には当然に思えるような事柄に対して，それらが成立するための本質的な部分を理解することも目指す．

位相空間が与えられ，関数の連続性や点列の収束について議論するとき，開集合や近傍が重要な役割を果たす．ところが，そのとき全ての開集合や近傍を考える必要はない．例えば，距離空間では近傍や開集合として ε-近傍を考えれば十分である．そこで，開集合や近傍の一部を上手く抜き出して議論を行うことが多々ある．まず，$\{\mathcal{N}(x)\}_{x\in X}$ を集合 X の近傍系とする．$x \in X$ に対して，$\mathcal{N}_0(x) \subset \mathcal{N}(x)$ が**基本近傍系**であるとは，任意の $N \in \mathcal{N}(x)$ に対してある $N_0 \in \mathcal{N}_0(x)$ が存在して $x \in N_0 \subset N$ をみたすときにいう．例えば距離空間の場合には，$\{N(x,\varepsilon)|\varepsilon > 0\}$ や $\{N(x,1/n)|n \in \mathbf{N}\}$ は x の基本近傍系となる．特に，$\{N(x,1/n)|n \in \mathbf{N}\}$ は可算集合である．このように，各点が高々可算な基本近傍系を持つとき，その位相空間は**第一可算公理**をみたすという．第一可算公理に関する命題を紹介する．

命題 7.1 (1) 距離空間及び離散位相空間は第一可算公理をみたす．
(2) 第一可算公理をみたすならば，定理 6.4(2) の逆命題が成立する．
(3) 第一可算公理をみたす位相空間上の関数に対して，ある点で連続であることとその点で点列連続であることは同値である．

証明.　(1) 距離空間については明らか．離散位相空間において一点集合 $\{x\}$ は x の近傍になることから，$\mathcal{N}_0(x)$ として $\{\{x\}\}$ を取れる．従って，第一可算公理をみたす．
(2) 一樂 [1] の定理 5-1 を参照せよ．
(3) X, Y を位相空間とし，$f : X \to Y$ が $x_0 \in X$ で連続でないとき点列連続でないことを示す．X が第一可算公理をみたすことから，$\{N_1, N_2, \ldots\}$ を x_0 の基本近傍系とする．$n \in \mathbf{N}$ に対して $B_n = \cap_{k=1}^{n} N_k$ とおくと，これは縮小列であり，x_0 の基本近傍系を成す．$f(x_0)$ の近傍 N_Y で，$f^{-1}(N_Y)$ が x_0 の近傍にならないものが存在する．つまり，各 n に対して $B_n \cap (f^{-1}(N_Y))^c \neq \emptyset$ となる．従って，$y_n \in B_n \cap (f^{-1}(N_Y))^c$ をみたすように点列 $\{y_n\}$ を取ると，

これは x_0 に収束している．ところが，$f(y_n) \notin N_Y$ であるから点列連続でない． $\square$

次に，$\mathcal{U}$ を X の開集合系とする．このとき，部分集合族 $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ が**開集合系の基**であるとは，任意の $U \in \mathcal{U}$ が $\mathcal{U}_0$ の元の和集合で書けるときにいう．この条件は,「任意の $U \in \mathcal{U}$ と $x \in U$ に対してある $U_0 \in \mathcal{U}_0$ が存在して $x \in U_0 \subset U$ をみたす」と書きかえることもできる．

注意 7.2 空でない集合 X の部分集合族 $\mathcal{A}$ に対して，$\mathcal{A}$ の有限個の要素の共通部分の全体を開集合の基に持つ X 上の位相が一意的に定まる．この位相を，$\mathcal{A}$ **よって生成される位相**という．

高々可算な開集合系の基を持つとき，**第二可算公理**をみたすという．通常の距離を導入したユークリッド空間は第二可算公理をみたす．なぜならば，中心の座標が有理数で半径も有理数であるような開球の全体が開集合系の基になるからである．ここで，位相空間 X に対して $\overline{A} = X$ となる $A \subset X$ が取れるとき，A は X で**稠密** (ちゅうみつ) であるという．そして，高々可算な稠密部分集合を持つ位相空間を**可分**という．以下の命題を証明なしで紹介する．

命題 7.3 (1) 第二可算公理をみたす位相空間は第一可算公理もみたす．
(2) 位相空間が第二可算公理をみたすならば可分である．
(3) 可分な距離空間は第二可算公理をみたす．

続いて，二つの**分離公理**を紹介する．

定義 7.4 $(X,\mathcal{U})$ を位相空間とする．
(1) X が T_1**-分離公理**をみたすとは，任意の異なる 2 点 $x_1, x_2 \in X$ に対して，$x_1 \in U_1 \cap U_2^c, x_2 \in U_1^c \cap U_2$ をみたす開集合 U_1, U_2 が存在するときにいう．また，T_1-分離公理をみたす位相空間を T_1**-空間**という．
(2) X が T_2**-分離公理**をみたすとは，任意の異なる 2 点 $x_1, x_2 \in X$ に対して，$U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ が存在して $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2, U_1 \cap U_2 = \emptyset$ がみたすときにいう．また，T_2-分離公理をみたす位相空間を**ハウスドルフ空間**または T_2**-空間**という．

距離空間や補有限位相は T_1-空間である．T_1-空間に関して以下の命題が成立する．

命題 7.5 (1) 位相空間が T_1-空間であるための必要十分条件は，全ての一点部分集合が閉集合であることである．
(2) 第一可算公理を満たしている T_1-空間に対して，定理 6.4(1) の逆命題が成立する．

証明． (1) X を T_1-空間とする．$x_0 \in X$ とし，$\{x_0\}^c$ が開であることを示す．T_1-分離公理より，任意の $x \in X - \{x_0\}$ に対して，$x \in U_x \subset \{x_0\}^c$ なる開集合 U_x が存在する．$\{x_0\}^c = \bigcup_{x \in \{x_0\}^c} U_x$ より，$\{x_0\}^c$ は開集合である．逆は，定義 7.4(1) において，$U_1 = \{x_2\}^c, U_2 = \{x_1\}^c$ と取ればよい．
(2) X を第一可算公理と T_1-分離公理をみたす位相空間とし，$x \in X$ を $A \subset X$ の集積点とする．命題 7.1(3) の証明のように，縮小列になっている x の基本近傍系 $\{B_1, B_2, \ldots\}$ を構成する．このとき，x は $A - \{x\}$ の触点であるから，各 $n \in \mathbf{N}$ に対して $B_n \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$ である．よって，$x_n \in B_n \cap (A - \{x\})$ をみたすように点列 $\{x_n\}$ を構成すると，これは x に収束する． □

次に，ハウスドルフ空間について述べよう．距離空間を始め我々が通常取り扱う位相空間の多くはハウスドルフ空間である．

命題 7.6 (1) ハウスドルフ空間は T_1-空間である．
(2) X をハウスドルフ空間とする．X 上の点列 $\{x_n\}$ が極限を持てば，それは一意である．
(3) X が第一可算公理をみたす位相空間であるとき，(2) の逆命題が成立する．つまり，任意の収束点列の極限が一意であれば，X はハウスドルフ空間である．

証明． (1) は明らか．(2) も，収束の定義に立ち返ればすぐに分かる．(3) を示そう．X を第一可算公理をみたす位相空間でハウスドルフ空間でないものとする．ゆえに，ある 2 点 $x_1, x_2 \in X$ が存在し，$x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$ なる任意の開集合 $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ は $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ をみたす．そこで，$i = 1, 2$ に対して，$\{B_i^n\}_{n \in \mathbf{N}}$ を縮小列となる x_i の基本近傍系とする．このとき，$B_1^n \cap B_2^n \neq \emptyset$ がすべての n について成り立つから，$y_n \in B_1^n \cap B_2^n$ をみたすように $\{y_n\}$ を取ると，x_1 と x_2 の両方に収束する． □

最後に，遺伝的性質と位相的性質を定義する．集合に関する性質 P が**遺伝的性質**であるとは，性質 P を持つ位相空間のすべての部分空間が性質 P を持つときにいう．第一可算公理，第二可算公理，T_1-分離公理，T_2-分離公理はすべて遺伝的性質であるが，可分はそうでない．例えば，半開長方形 $\{(x, y) | a \leq x < b, c \leq y < d\}$ から生成される $\mathbf{R}^2$ 上の位相空間は可分である．一方，直線 $\{(x, y) | x + y = 0\}$ 上の相対位相は離散位相であり可分でない．次に，性質 P が**位相的性質**であるとは，性質 P を持つ位相空間の同相な位相空間も必ず性質 P を持つときにいう．例えば，$\mathbf{R}$ と $(0, 1)$ は同相であるが，長さは異なる．つまり，長さは位相的性質でない．一方，第一可算公理，第二可算公理，T_1-分離公理，T_2-分離公理，可分性はすべて位相的性質である．

第 8 週　実数の連続性

ここから趣を変えて，位相空間論を用いた解析学の基礎づけについて論じる．解析学 (要するに微分積分学であるが) を厳密に論じることは意外と厄介である．そのためには実数について掘り下げる必要がある．実数について我々は直観的に理解している部分がかなりある．特に，実数の連続性について深く考察することはこれまでなかったと思う．微積分において割と当たり前だと思われる様々な結果，平均値の定理や中間値の定理を厳密に示そうと思うと，実数の連続性の仮定なしではすまされないのである．そこで，今週はまず実数の連続性について論じる．

ここでは，集合とはすべて実数 $\mathbf{R}$ の部分集合とする．まずは定義から始めよう．

定義 8.1 (1) 空でない集合 $X \subset \mathbf{R}$ が**上に有界 (下に有界)** であるとは，任意の $x \in X$ に対して $x \leq a (x \geq a)$ なる $a \in \mathbf{R}$ が存在するときにいう．この a を X の**上界 (下界)** という．上にも下にも有界である集合を単に**有界**という．
(2) 上に (下に) 有界な集合 X の上界 (下界) の中で最小 (最大) なものを X の**上限 (下限)** といい，$\sup X (\inf X)$ と書く．

注意 8.2 (1) 有限集合は常に有界である．
(2) $\{x \in \mathbf{R} | x \leq 5\}$ と $\{x \in \mathbf{R} | x < 5\}$ は共に上に有界であり，共に上限は 5 である．上限は元の集合に含まれている場合もそうでない場合もある．
(3) 自然数の全体 $\mathbf{N}$ は下に有界であるが，上に有界ではない．

ここで，**実数の連続性公理**として以下を仮定する:

仮定 8.3 (実数の連続性公理) 上に有界な集合は必ず上限を持つ．

この実数の連続性公理から導かれる命題をいくつか紹介する．まず，実数列 $\{x_n\}$ を集合 $\{x_1, x_2, \ldots\}$ と同一視する．集合 $\{x_1, x_2, \ldots\}$ が有界であるとき，実数列 $\{x_n\}$ は**有界**であるという．また，$x_n \leq x_{n+1}$ が任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して成立しているとき，$\{x_n\}$ は**単調増大**であるという．

定理 8.4 有界な単調増加数列は収束列である．

証明． 有界単調増加数列 $\{x_n\}$ に対して，$A = \{x_1, x_2, \ldots\}$ とおく．連続性公理より，$\alpha = \sup A$ が存在する．$\varepsilon > 0$ を任意に固定する．α は A の上限だから，$\alpha - \varepsilon$ は A の上界ではない．よって，$\alpha - \varepsilon < x_{n_0}$ をみたす番号 n_0 が存在する．$\{x_n\}$ は単調増大列だから，$n \geq n_0$ ならば $\alpha - \varepsilon < x_n$ である．一方，α が上限であることから $x_n \leq \alpha$ が成立する．以上より，$n \geq n_0$ ならば $|x_n - \alpha| < \varepsilon$ が成立する．よって，$\{x_n\}$ は α に収束する．□

注意 8.5 実数の連続性公理は「下に有界な集合は必ず下限を持つ」と言い換えても同じである．同様に,「有界単調減少数列は収束列である」も成立する．

次に，**区間縮小法の原理**を紹介しよう．$I_1, I_2, \ldots$ を閉区間の列とする．各 I_n を $[a_n, b_n]$ と書く．今，$\{I_n\}$ は単調減少列，つまり任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して $I_{n+1} \subset I_n$ であるとし，さらに $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ が成り立つものとする．

定理 8.6 (区間縮小法の原理) $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{\alpha\}$ をみたすただ一つの実数 α が存在する．

証明． 閉区間列の下端と上端から作られる数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は，

$$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le \ldots \le b_n \le \ldots \le b_2 \le b_1$$

をみたす，有界単調増大及び減少な数列である．定理 8.4 より，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ が存在する．いま，$\alpha > b_m$ をみたす番号 m が存在するものとしよう．$\varepsilon = \alpha - b_m$ とする．このとき，十分大きな番号 n_0 が存在し，$n > n_0$ ならば $\alpha - \varepsilon < a_n \le \alpha$ をみたす．従って，$n > n_0$ ならば $b_m < a_n \le \alpha$ が成立する．これは矛盾である．以上より，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して $a_n \le \alpha \le b_n$ が成立．よって，$\alpha \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ を得る．

次に，$\beta \ne \alpha$ で $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ に属すものが存在するとしよう．$\beta > \alpha$ としよう．$\varepsilon = \beta - \alpha$ とすると，n が十分大きければ，$\beta = \alpha + \varepsilon \ge a_n + \varepsilon > b_n$ が成立する．従って，$\beta \notin I_n$ となり矛盾が生じる．$\beta < \alpha$ としても同様に矛盾を得る．以上より，題意成立． □

系 8.7 任意の実数 α に対して，α に収束する有理数列が存在する．

三つ目として**デデキントの切断**について論じよう．集合 $X \subset \mathbf{R}$ に対して，(1) $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$，(2) $a \in A, b \in B$ ならば $a < b$，の二条件をみたす集合の組 (A, B) を X の**切断**という．例えば,

$$A = \{x \in \mathbf{R} | x \le 2\}, B = \{x \in \mathbf{R} | x > 2\}$$

は $\mathbf{R}$ の切断である．この切断により，実数「2」が定義されていると考えても良い．一方,

$$A = \{x \in \mathbf{R} | x < 2\}, B = \{x \in \mathbf{R} | x \ge 2\}$$

としても $\mathbf{R}$ の切断を与える．A に最大数が存在し B に最小数が存在しないか，A に最大数が存在せず B に最小数が存在するか，いずれか一方が成立する．今度は有理数の集合 $\mathbf{Q}$ 上の切断を考えよう．

$$A = \{x \in \mathbf{Q} | x \le 0 \text{ または } x^2 \le 3\}, B = \{x \in \mathbf{Q} | x > 0 \text{ かつ } x^2 > 3\}$$

は $\mathbf{Q}$ 上の切断であり，$\sqrt{3}$ を定義している．ところが，A の最大数も B の最小数も存在しない．また，有理数の稠密性から A の最大数も B の最小数も存在するような切断は存在しないのである．一方，この切断を実数上で考えると，A に最大数が存在し B に最小数は存在しない．このように実数上の切断では，A の最大数と B の最小数のいずれか一方のみが必ず存在する．これを**デデキントの切断公理**と呼ぶ．これを連続性公理から導く．

定理 8.8 (デデキントの切断公理) 実数の切断 (A, B) において，A の最大数または B の最小数のいずれか一方のみが存在する．

証明． $a_1 \in A, b_1 \in B$ を任意に取る．中点 $\frac{a_1+b_1}{2}$ が A に入っていれば a_2 とし，$b_2 = b_1$ とする．そうでなければ中点を b_2 とし，$a_2 = a_1$ とする．以下，同様に中点を取り，$[a_3, b_3], [a_4, b_4], \ldots$ を構成する．区間縮小法の原理より $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{\alpha\}$ となる実数 α が取れる．$\alpha \in A$ または $\alpha \in B$ である．まず $\alpha \in A$ とする．α が A の最大数でないとすると，$\alpha < a \in A$ なる a が取れる．切断の定義と列 $\{[a_n, b_n]\}$ の構造から，任意の番号 n に対して $a_n \leq \alpha < a < b_n$ となる．よって，$b_n - a_n > a - \alpha > 0$ であり矛盾．結局，α は A の最大数である．同様に $\alpha \in B$ のとき α は B の最小数となる． □

実は，証明は省略するが，デデキントの切断公理を仮定して実数の連続性公理を導くこともできる．従って，連続性公理，有界単調増大列の極限の存在，区間縮小法の原理，デデキントの切断公理は同値な条件である．従って，どれを仮定しても構わない．

今週の締めくくりとして，数列 $1, 1/2, 1/3, \ldots$ が 0 に収束することを考える．このことは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある番号 n_0 が取れて，$n > n_0$ ならば $1/n < \varepsilon$ であることを意味している．つまり，$\varepsilon > 1/n$ なる自然数が任意の正数 ε に対して存在するということである．このことが保証されている理由は何であろうか? これは次の**アルキメデスの原理**から言えるのである．

定理 8.9 (アルキメデスの原理) 実数の連続性公理を仮定する．a, b は異なる実数で $0 < a < b$ をみたすものとする．このとき，$b < na$ をみたす自然数 n が存在する．

このアルキメデスの原理は，
(1) $\mathbf{N}$ は上に有界ではない，
(2) 2 つの実数 a, b が $a < b$ であるとき，$a < x < b$ なる実数 x が存在する，
と同値である．アルキメデスの原理や (2) の稠密性は，実数だけでなく有理数でも成立する．一方，連続性は実数だけが持つ性質であり，有理数との違いを浮き彫りにしている．従って，アルキメデスの原理を仮定して連続性公理を導くことはできない．

第 9 週　微分積分学再訪

実数の連続性公理を仮定し，微分積分学に現れるいくつかの基本定理を厳密に示すことを試みる．まず，以下の定理から始める:

定理 9.1 閉区間上の連続関数は，(1) 有界であり，(2) 最大値を持つ．

証明． 閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数 f に対して，$M=\{f(x)|x\in[a,b]\}$ とする．
(1) M が上に有界でないとする．$[a,b]$ を二つの区間 $[a,\frac{a+b}{2}],[\frac{a+b}{2},b]$ に分けると，M は少なくとも一方で上に有界でない．有界でない区間を改めて $[a_1,b_1]$ と書く．さらにこれを二つに分けて上に有界でない方を $[a_2,b_2]$ とする．以下，これを繰り返し閉区間の縮小列 $\{[a_n,b_n]\}$ を作る．各区間で関数 f は上に有界でない．区間縮小法の原理より，$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{c\}$ をみたす実数 c が存在する．関数の連続性より，δ を十分小さく取れば,「$|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(c)|<1$」が成立する．従って，開区間 $(c-\delta,c+\delta)$ において f は $f(c)+1$ より小さい．一方，n が十分大きければ $[a_n,b_n]\subset(c-\delta,c+\delta)$ となることより，矛盾が生じる．結局，f は上に有界である．下に有界であることも同様にして示せる．
(2) (1) より M は上限 α を持つ．(1) の証明と同様にして，区間 $[a,b]$ を半分に分け，上限 α を持つ方を $[a_1,b_1]$ とする．これを繰り返して閉区間の縮小列を構成し，区間縮小法の原理から $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{c\}$ をみたす実数 c を取る．以下，$f(c)=\alpha$ をみたすことを示す．$f(c)<\alpha$ であることを仮定する．$\varepsilon=\frac{\alpha-f(c)}{2}$ としよう．このとき，関数の連続性から,「$|x-c|<\delta$ ならば $|f(x)-f(c)|<\varepsilon$」をみたす $\delta>0$ が存在する．従って，$(c-\delta,c+\delta)$ 上で f は $f(c)+\varepsilon$ を越えない．すると，$f(c)+\varepsilon<\alpha$ であるから $f(c)+\varepsilon<y<\alpha$ となる実数 y が取れて，$\{f(x)|x\in(c-\delta,c+\delta)\}$ の上界になっている．一方，n が十分大きければ $[a_n,b_n]\subset(c-\delta,c+\delta)$ となるので，$[a_n,b_n]$ 上で f が上限 α を持つことに反する．よって，$f(c)\geq\alpha$，つまり $f(c)=\alpha$ である．　□

(2) では，最大値だけでなく最小値の存在も同様にして示せる．閉区間上の連続関数が最大値を持つことは当然のこととしてきたかもしれない．しかし，$f(x)=-(x-\sqrt{2})^2$ が有理数上に定義されていると，もはや最大値を持たない．最大値の存在は実数の連続性に強く依存しているのである．上記の証明を見ても，実数の連続性公理，実際は区間縮小法の原理，に強く依存していることがわかる．定理 9.1 から微積分に関する様々な定理を導出できる．ここでは**ロルの定理**，**平均値の定理**，**テイラーの定理**を一気に示す．

定理 9.2 (ロルの定理) 閉区間 $[a,b]$ で連続，開区間 (a,b) で微分可能な関数 f が $f(a)=f(b)=0$ をみたすとき，$f'(c)=0$ となる $c\in(a,b)$ が存在する．

証明． f が閉区間 $[a,b]$ 上定数ならば定理は成立する．そこで，f は定数でないとする．定理 9.1 より，f は最大値を持つ．最大値は $c\in[a,b]$ で実現す

るとしよう．$f(c) \geq 0$ であり，さらに f は定数でないから $f(c) > 0$ としても一般性を失わない．従って，$c \in (a, b)$ である．c における微分係数を考える．

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

であり，分子は常に 0 または負である．よって，$h > 0$ のとき，右辺の分数も 0 または負であり，h を上から 0 に近づけた極限も 0 または負である．一方，h を下から 0 に近づけると，その極限は 0 または正になる．従って，$f'(c) = 0$ である． □

定理 9.3 (平均値の定理) 閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) で微分可能な関数 f に対して，

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

をみたす $c \in (a, b)$ が存在する．

証明． $K = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ として，$g(x) = f(b) - \{f(x) + K(b-x)\}$ とおく．$g(a) = g(b) = 0$ であるから，ロルの定理から $g'(c) = 0$ となる $c \in (a, b)$ が存在する．$g'(x) = -f'(x) + K$ であるから，$f'(c) = K$ を得る． □

定理 9.4 (テイラーの定理) 閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) で n 回微分可能な関数 f に対して，

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(b-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(b-a)^3 + \dots \\ &\quad + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(b-a)^{(n-1)} + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(b-a)^n \end{aligned}$$

をみたす $c \in (a, b)$ が存在する．

証明． 定理 9.3 と同様にして示す．$K = \frac{1}{(b-a)^n}\Big(f(b) - \Big(f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(b-a)^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(b-a)^{(n-1)}\Big)\Big)$ とおき，$g(x) = f(b) - \Big(f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(b-a)^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(b-a)^{(n-1)} + +K(b-x)^n\Big)$ と取る．ロルの定理から $K = \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)$ を得る． □

話題を変えよう．自然対数の底 e の存在を示す．e の定義には何通りかの方法があるが，ここでは $e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$ として定義する．問題は右辺の極限が存在するかどうかである．そのためには，実数列 $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ が有界単調増加であることを確かめれば，連続性公理の仮定の下，e の存在が保証される．

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{1}{n^k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\prod_{j=1}^{k-1}\left(1 - \frac{j}{n}\right)$$

$$< \quad 1+1+\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k!}\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n+1}\right)=x_{n+1}$$

であるから単調増大であり，

$$\begin{aligned} x_n &= 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right) \\ &< 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}<1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}<3 \end{aligned}$$

であるから有界である．

最後に，**ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理**を紹介する．連続性公理と同値な条件として，有界単調増加数列の極限の存在というのがあった．有界数列であっても単調増大性がなければ収束列になるとは限らない．例えば，$1,-1,1,-1,\ldots$ という数列を考えよ．ここでは，有界数列は収束列とは限らないが，上手く部分列を抜き出せば収束列となることを示す．

定理 9.5 (ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理) 有界数列は収束する部分列を持つ．

証明． 再び区間縮小法の原理を用いる．有界数列 $\{x_n\}$ を取る．任意の $n\in\mathbf{N}$ に対して $a\le x_n\le b$ が成立するような実数 a,b を取る．閉区間 $[a,b]$ を半分に分ける．少なくともどちらか一方は，$\{x_n\}$ の項を無限個含む．無限個含む方を $[a_1,b_1]$ とする．このとき，$[a_1,b_1]$ に入る $\{x_n\}$ の項を一つ抜き取り，x_{i_1} とする．さらに $[a_1,b_1]$ を半分に分け，$\{x_n\}$ の項を無限個含む方を $[a_2,b_2]$ とする．ここで，$[a_2,b_2]$ に属す $\{x_n\}$ の i_1 以降の項を一つ抜き取り，x_{i_2} とする．$[a_2,b_2]$ は無限個の $\{x_n\}$ の項を含むのでこのような x_{i_2} が取れる．以下，これを繰り返し閉区間の縮小列 $\{[a_n,b_n]\}$ を構成し，同時に $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{i_n}\}$ も抜き取る．区間縮小法の原理より，$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{c\}$ をみたす実数 c が存在する．最後に部分列 $\{x_{i_n}\}$ は c に収束することを示そう．各 n に対して，$|x_{i_n}-c|\le\frac{1}{2^n}(b-a)$ である．従って，任意の $\varepsilon>0$ に対して，n を十分大きく取れば，$\frac{1}{2^n}(b-a)<\varepsilon$ が満たされる．結局，部分列 $\{x_{i_n}\}$ は c に収束する． □

この定理を言い換えると，「有界閉区間上の如何なる点列も収束する部分列を持つ」となる．実は，ある位相 X に関して，X 上の点列が必ず収束部分列を持つとき，X は**点列コンパクト**であるという．よって，定理 9.5 は「数直線上の通常の位相において，すべての有界閉区間は点列コンパクトである」と同値である．詳しくは第 12 週で述べる．

第10週　連結性と中間値の定理

位相空間やその部分集合が「ひとかたまり」であることを連結という．例えば，数直線上の通常の位相において，閉区間 $[-1,1]$ はひとかたまりである．一方，0だけを除いた集合 $[-1,0)\cup(0,1]$ は「ひとかたまり」とは言えない．このことをきちんと定義する．

定義 10.1 位相空間 $(X,\mathcal{U})$ が**不連結**であるとは，二つの空でない開集合 $U_1,U_2\in\mathcal{U}$ が取れて

$$X=U_1\cup U_2,\qquad U_1\cap U_2=\emptyset$$

をみたすときにいう．このような二つの開集合 U_1,U_2 を X の**分離**という．さらに，X の分離が存在しないとき，X を**連結**という．また，$A\subset X$ が連結であるとは，A を部分空間とした位相で連結であるときにいう．

連結に関して別の定義も与えておこう．但し，証明は省く．

定理 10.2 位相空間 X が連結であることの必要十分条件は，閉集合かつ開集合となる X の部分集合が X 自身と空集合に限ることである．

まず，数直線 $\mathbf{R}$ の連結部分集合について論じよう．閉区間や開区間が連結であることは直観的に明らかであろう．さらに，区間は有限でなくても連結になる．実は，$\mathbf{R}$ の連結部分集合は一点集合と区間に限るのである．ここで，区間の正確な定義を与えておく．$A\subset\mathbf{R}$ が**区間**であるとは，$x_1,x_2\in A$ ならば $x_1<x<x_2$ なる x は A に含まれるときにいう．

定理 10.3 $A\subset\mathbf{R}$ を2点以上含む集合とする．A が連結であることの必要十分条件は，区間であることである．

証明．　必要性: A が区間でないとすると，$x_1,x_2\in A,y\notin A,x_1<y<x_2$ なる3点 x_1,x_2,y が取れる．$U_1=(-\infty,y),U_2=(y,\infty)$ とおくと，$x_1\in U_1,x_2\in U_2$ となり，$A\cap U_1$ と $A\cap U_2$ は A を分離する．A は不連結である．
十分性: A を不連結な区間としよう．このとき，$\mathbf{R}$ 上の開集合 U_1,U_2 で $A\cap U_1$ と $A\cap U_2$ が A の分離となるものが存在する．$x_1\in A\cap U_1$ と $x_2\in A\cap U_2$ を任意に取りだす．$x_1<x_2$ であるとして一般性を失わない．$A\cap U_1\cap[x_1,x_2]$ は上に有界だから，$\alpha=\sup(A\cap U_1\cap[x_1,x_2])$ が存在する．明らかに $\alpha\in[x_1,x_2]$ であり，A は x_1 と x_2 両方を含む区間なので，$\alpha\in A$ となる．今，$\alpha\in U_1$ であると仮定しよう．$\alpha<x_2$ であり，U_1 は $\mathbf{R}$ の開集合なので，ある $\delta>0$ が存在し，$[\alpha,\alpha+\delta]\subset U_1$ となる．つまり，$\alpha+\delta<x_2$ である．A は区間なので $\alpha+\delta\in A$ であり，従って $\alpha+\delta\in A\cap U_1$ である．しかしこれは α の定義に反する．よって，$\alpha\notin U_1$．同様にして $\alpha\notin U_2$ も成立する．ゆえに，$\alpha\notin A$ となり矛盾が導き出された．結局，A は連結である．　□

ここで重要な一つ定理を示そう．これより，連結性は位相的性質であることがわかる．

定理 10.4 X, Y を位相空間とし $A \subset X$ を連結とする．$f : A \to Y$ が連続ならば，$f(A)$ も連結である．

証明． $f(A)$ が不連結であるとしよう．このとき，二つの空でない $f(A)$ 上の開集合 U_1, U_2 が存在し，$f(A) = U_1 \cup U_2, U_1 \cap U_2 = \emptyset$ をみたす．さらに相対位相の定義から，Y の開集合 U_1^Y, U_2^Y が存在し，$U_1 = f(A) \cap U_1^Y, U_2 = f(A) \cap U_2^Y$ となる．f は連続なので，$f^{-1}(U_1^Y), f^{-1}(U_2^Y)$ は A 上の開集合 (A の部分集合である)．$x \in A$ を取ると，$f(A) = U_1 \cup U_2$ であるから，$f(x) \in U_1^Y$ または $f(x) \in U_2^Y$ である．つまり，$x \in f^{-1}(U_1^Y) \cup f^{-1}(U_2^Y)$ であるから，$A = f^{-1}(U_1^Y) \cup f^{-1}(U_2^Y)$ を得る．U_1 は空でないので，$f(A) \cap U_1^Y$ も空でない．従って，$f(x) \in U_1^Y$ となる $x \in A$ が存在する．よって，$f^{-1}(U_1^Y) \neq \emptyset$ である．同様にして，$f^{-1}(U_2^Y) \neq \emptyset$ となる．ここで，$f^{-1}(U_1^Y) \cap f^{-1}(U_2^Y) \neq \emptyset$ と仮定する．つまり，$x \in A$ で $f(x) \in U_1^Y$ かつ $f(x) \in U_2^Y$ であるものが存在する．よって，$f(x) \in f(A) \cap U_1^Y \cap U_2^Y = U_1 \cap U_2 = \emptyset$ となり矛盾．結局，$f^{-1}(U_1^Y) \cap f^{-1}(U_2^Y) = \emptyset$ となり，A は不連結である． □

この定理の応用例として中間値の定理を示そう．よく知られた基本的な定理であるが，その証明には，区間が連結であることと，連結性が位相的性質であることが使われている．

定理 10.5 (中間値の定理) 連続関数 $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ が，$f(a) \leq 0$ かつ $f(b) \geq 0$ をみたすとき，$f(c) = 0$ となる $c \in [a, b]$ が存在する．

証明． $[a, b]$ は連結なので，$f([a, b])$ も連結となる．従って，$f([a, b])$ は区間である．区間の定義と定理の条件から，$0 \in f([a, b])$ を得る． □

中間値の定理は実数の連続性から直接示すこともできる．念のため，その証明を紹介しておこう．まず，補題を一つ準備しておく．

補題 10.6 f を実数上の連続関数とし，$f(x_0) > 0$ とする．このとき，ある $\delta > 0$ が存在し，$|x - x_0| < \delta$ ならば $f(x) > 0$ である．

証明． $\varepsilon = f(x_0)$ とすると，$\delta > 0$ が存在し $|x - x_0| < \delta$ ならば $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ となる． □

中間値の定理の証明． $f(a) < 0$ かつ $f(b) > 0$ の場合を示す．$M = \{x | a \leq x_0 \leq x$ ならば $f(x_0) < 0\}$ とおく．$b \notin M$ であるから M は上に有界．従って，$\alpha = \sup M$ が存在する．$f(\alpha) > 0$ としよう．前述の補題より，ある $\delta > 0$ が取れて，$|x - \alpha| < \delta$ ならば $f(x) > 0$ となる．そこで，$\alpha - \delta < x < \alpha$ なる x

を取ると，$x \notin M$ より x は M の上界になる．これは α の定義に反する．一方，$f(\alpha) < 0$ としても同様に矛盾が導かれるので，$f(\alpha) = 0$ を得る． □

次にちょっとトリッキーな結果を紹介し，そこからいくつかの命題を導こう．

補題 10.7 位相空間 X が連結であることの必要十分条件は，$|f(X)| \leq 2$ である連続関数 $f : X \to \mathbf{R}$ は定数関数である．

証明． 必要性: $f(X) = \{y_1, y_2\}$ なる連続関数を考える．但し，$y_1 < y_2$ とする．$\delta = \frac{y_2 - y_1}{2}$ として，$i = 1, 2$ に対して $U_i = f^{-1}((y_i - \delta, y_i + \delta))$ とおくと，U_1, U_2 は X を分離する．
十分性: X を不連結とし，U_1, U_2 を X の分離とする．f として U_1 上 0 で，U_2 上 1 となるものを取ると，U_1, U_2 は開集合であり，f は連続である． □

命題 10.8 互いに素ではない 2 つの連結集合の和集合は連結である．

証明． A_1, A_2 を $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ をみたす連結集合とする．$f : A_1 \cup A_2 \to \mathbf{R}$ は連続で，その値域は高々2 つの要素から成るとしよう．f を A_1 や A_2 に制限すると，補題 10.7 から定数関数となる．制限した関数の連続性もすぐに示せる．ところが，$A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ なので，2 つの制限関数が取る定数は一致する．よって，f は定義域全体 $A_1 \cup A_2$ で定数関数である． □

命題 10.9 距離空間上の連結集合 A に対して，$A \subset B \subset \overline{A}$ ならば B も連結である．

証明． $f : B \to \mathbf{R}$ を連続関数で高々2 つの値しか取らないものとする．f を A に制限した関数は定数関数である．その定数を k としよう．一方，$B - A$ は A の集積点である．そこで，$x \in B - A$ に対して，距離空間は第一可算公理と T_1-分離公理をみたすから，x に収束する A 上の点列 $\{x_n\}$ が存在する．また，f の点列連続性から，$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = k$ が成立する．よって，f は B 上で定数関数となる． □

例 10.10 $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | y = \sin\frac{1}{x}, 0 < x \leq \frac{1}{\pi}\}$ とする．明らかに，$\sin\frac{1}{x}$ は連続関数だから，A は $\mathbf{R}^2$ の連結集合である．一方，$B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x = 0, y \in [-1, 1]\}$ とする．実は，B の各点は A の集積点である．例えば，点 $(0, \frac{1}{2})$ を考えよう．$\{x \in (0, \frac{1}{\pi}] | \sin\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\}$ は可算無限集合で，0 を集積点に持つ．つまり，0 に収束する $\{x \in (0, \frac{1}{\pi}] | \sin\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\}$ 上の減少列が存在する．従って，点 $(0, \frac{1}{2})$ は A の集積点である．以上より，命題 10.9 から $A \cup B$ は連結集合である．A は直接 B に繋がっていないが，いくらでも近づく列を構成できる．このことから $A \cup B$ の連結性が導かれたのである．

第 11 週　コンパクト —定義と基本性質—

まずは，**ハイネ-ボレルの定理**から始めよう．一般に，集合 A に対し，集合族 $\mathcal{A} = \{A_i | i \in I\}$ が**被覆**であるとは，$A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ が成立するときにいう．尚，I はインデックス集合であり，必ずしも可算集合とは限らない．また，各 A_i が開集合であるとき，$\mathcal{A}$ を**開被覆**という．まずは，実数 $\mathbf{R}$ に通常の位相を導入した場合について考察する．

定理 11.1 (ハイネ-ボレルの定理) 開区間の族 $\mathcal{G} = \{G_i | i \in I\}$ が有界閉区間 $A = [a, b]$ の開被覆であるとき，$\mathcal{G}$ の有限部分族 $\{G_{i_1}, \ldots, G_{i_K}\}$ で A を覆うものが存在する．つまり，$A \subset \bigcup_{k=1}^{K} G_{i_k}$ が成立する．

証明.　　区間縮小法の原理を用いて示す．如何なる $\mathcal{G}$ の有限部分族も A を覆わないとする．A を半分に分割する．つまり，$[a, \frac{a+b}{2}]$ と $[\frac{a+b}{2}, b]$ に分ける．このうちの少なくとも一方は，どの $\mathcal{G}$ の有限部分族でも覆われない．これを A_1 とする．A_1 を二分して二つの閉区間を作ると，どちらか一方は，再び $\mathcal{G}$ の有限部分族で覆われない．これを A_2 としよう．以下，これを繰り返し，有界閉区間の縮小列 $\{A_n\}$ を構成する．A_n の長さは 0 に収束するので，区間縮小法の原理より，$\alpha \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ なる α がただ一つ存在する．$\alpha \in A$ であり $\mathcal{G}$ は A の被覆なので，α を含む $\mathcal{G}$ の要素 G^{α} が取れる．このとき，α の定義と，G^{α} が開区間であることから，十分大きな番号 n_0 を取ると $A_{n_0} \subset G^{\alpha}$ が成立する．これは，列 $\{A_n\}$ の構成の仕方に矛盾する．　□

例 11.2 上記の定理が成立するためには，A は有界閉区間である必要がある．
(1) $A = (0, 1)$，$\mathcal{G} = \{(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}) | n \in \mathbf{N}\}$ とすると，$\mathcal{G}$ は A の開被覆であるが，有限部分族に落とすことはできない．なぜならば，$k \geq 2$ に対して，$\frac{1}{k}$ を含んでいる $\mathcal{G}$ の要素は $(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k-1})$ のみだからである．
(2) $A = [1, \infty)$，$\mathcal{G} = \{(n-1, n+1) | n \in \mathbf{N}\}$ とすると，$\mathcal{G}$ は A の開被覆である．しかしこの場合も，$\mathcal{G}$ を有限部分族に落とすことはできない．

有界閉区間のように，開被覆をいつでも有限被覆に落とせる集合を**コンパクト**という．正確な定義を与えよう．

定義 11.3 位相空間 X がコンパクトであるとは，任意の X の開被覆 $\mathcal{G} = \{G_i (\subset X) | i \in I\}$ に対して，ある有限部分族 $\{G_{i_1}, \ldots, G_{i_K}\}$ が存在して，$X = \bigcup_{k=1}^{K} G_{i_k}$ をみたすときにいう．また，$A \subset X$ がコンパクト部分集合であるとは，相対位相に関してコンパクトになるときにいう．

ここでもう一度，$\mathbf{R}$ の場合について考察する．ハイネ-ボレルの定理より，有界閉集合はコンパクトである．一方，$\mathbf{R}$ のような有界でない集合や開区間はコンパクトでない．実は，$\mathbf{R}$ におけるコンパクト集合は有界閉集合に限る．

つまり，コンパクト集合は，有界閉区間の和集合や共通部分で表されるのである．これを定理として述べておこう．

定理 11.4 $\mathbf{R}$ のコンパクト集合は有界閉集合に限る．

証明． 閉であることは後で示す定理 11.5(2) より得られる．有界であることを示そう．$A \subset \mathbf{R}$ をコンパクトとする．$\{(-r,r) | r > 0\}$ は $\mathbf{R}$ の開被覆であることから，有限個の正の実数 $r_1, \ldots, r_K$ を用いて，$A \subset \bigcup_{i=1}^{K}(-r_i, r_i)$ となる．よって，$\sup A \leq \max_{1 \leq i \leq K} r_i$ となり，A は有界である． □

コンパクトは位相空間論において最も重要な概念の一つである．その理由は追々説明していくが，重要な特徴として，コンパクトは有限の範囲内で議論できることがあげられる．コンパクト位相空間における重要な結果を四つ紹介する．

定理 11.5 (1) コンパクト位相空間の閉集合はコンパクトである．
(2) ハウスドルフ空間におけるコンパクト集合は閉集合である．

証明． (1) X をコンパクト位相空間，$F \subset X$ を閉集合とする．$\mathcal{G}$ を F の開被覆 (位相 X の意味で) とすると，$\mathcal{G}' = \mathcal{G} \cup \{F^c\}$ は X の開被覆になる．X のコンパクト性から，$\mathcal{G}'$ を有限被覆に落とせる．つまり，$X = \bigcup_{k=1}^{K} G_{i_k} \cup F^c$ となる $\{G_{i_1}, \ldots, G_{i_K}\}$ が取れる．従って，$F \subset \bigcup_{k=1}^{K} G_{i_k}$ を得る．F はコンパクトである．
(2) $(X,\mathcal{U})$ をハウスドルフ空間，$A \subset X$ をコンパクトとする．今，$y \in A^c$ を任意に取る．X がハウスドルフ空間であることから，各 $x \in A$ に対して，x の開近傍 N_x と y の開近傍 N_y が存在し，$N_x \cap N_y = \emptyset$ をみたす．このとき，$y \notin \overline{N}_x$ となることに注意しよう．従って，$\{U | U \in \mathcal{U}, y \notin \overline{U}\}$ は A の開被覆になる．A はコンパクトなので，この中から有限個を選び出して，$A \subset U_1 \cup \ldots \cup U_K$ となる．この右辺を V とすると，$\overline{V} = \bigcup_{i=1}^{K} \overline{U_i}$ であり，$y \notin \overline{V}$ である．つまり，$\overline{V}^c$ は y の開近傍であり，$\overline{V}^c \cap A = \emptyset$ であるから，y の任意性から A^c は開である． □

定理 11.6 コンパクト位相空間上の連続関数の像はコンパクトである．

証明． X をコンパクト位相空間，Y を位相空間とし，連続関数 $f : X \to Y$ を考える．$\mathcal{G}$ を $f(X)$ の開被覆とすると，f の連続性から，$\mathcal{H} = \{f^{-1}(G) | G \in \mathcal{G}\}$ は X の開被覆になる．$X = \bigcup_{k=1}^{K} f^{-1}(G_{i_k})$ となる有限部分族 $\{G_{i_1}, \ldots, G_{i_K}\}$ が取れる．従って，$f(X) = f\left(\bigcup_{k=1}^{K} f^{-1}(G_{i_k})\right) \subset \bigcup_{k=1}^{K} G_{i_k}$ を得る．ゆえに，$f(X)$ はコンパクトである． □

定理 11.7 位相空間がコンパクトであるための必要十分条件は，有限交叉性を持つ任意の閉集合族 $\{F_i | i \in I\}$ が $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$ をみたすことである．但し，部分集合族が**有限交叉性**を持つとは，それに属する任意の有限個の部分集合の共通部分が空でないときにいう．

証明. X をコンパクト位相空間としよう．$\{F_i\}$ を有限交叉性を持つ X の閉部分集合族とする．ここで，$\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$ と仮定する．このとき，$X = \bigcup_{i\in I} F_i^c$ であるから，$\{F_i^c\}$ は X の開被覆である．X のコンパクト性から，$X = \bigcup_{k=1}^{K} F_{i_k}^c$ となる部分族が取れる．従って，$\bigcap_{k=1}^{K} F_{i_k} = \emptyset$ となり，$\{F_i\}$ の有限交叉性に反する．十分性も同様にして示せる．□

定理 11.8 コンパクト位相空間上の実数値連続関数は最大値及び最小値を持つ．

証明. X をコンパクト位相空間とし，$f : X \to \mathbf{R}$ を連続関数とする．定理 11.6 より，$f(X)$ は $\mathbf{R}$ 上のコンパクト集合である．従って，定理 11.4 より有界閉集合である．実数の連続性公理から，$\sup f(X)$ と $\inf f(X)$ が存在する．さらに，$f(X)$ が閉集合であることから，$\sup f(X)$ と $\inf f(X)$ は $f(X)$ に属する．結局，これらは f の最大値と最小値を与える．□

定理 11.4 から，コンパクト集合が有界閉集合であるというイメージを持つ．それ自体間違いでないが注意が必要である．例えば，密着位相では全ての集合はコンパクトになる．定理 11.5(2) で，ハウスドルフ空間という条件は外せないのである．また，定理 11.6 では，コンパクトが位相的性質であることを示している．さらに，最適化問題における解の存在を論じる際に，コンパクト性が重要な役割を果たすことが定理 11.8 から分かる．

また，無限次元空間を考えると，単位閉球ですらコンパクトではなくなるのである．例えば，$\mathbf{R}$ 上の点列から成る空間

$$l^2 := \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots) | \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \right\}$$

を考える．$x, y \in l^2$ に対して，$d(x,y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2}$ とおくと，(l^2, d) は距離空間になる．l^2 の単位閉球 $B := \{x \in l^2 | \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \leq 1\}$ がコンパクトでないことを確かめよう．いま，e^n を n 番目の要素だけが 1 で残りは 0 となる点列とする．つまり，$e^n = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, \ldots)$ である．$n \neq m$ ならば $d(e^n, e^m) = \sqrt{2}$ となることから，l^2 上の列 (点列の列)$\{e^n\}_{n\geq 1}$ は B 上の列であり，明らかに収束部分列を持たない．つまり，B は点列コンパクトでない．従って，次週の定理 12.3 より，B はコンパクトでない．

第 12 週　一様連続性とリーマン積分

ここでは，対象を距離空間に絞ってコンパクト性を論じたい．まずは，第 9 週で紹介した点列コンパクト性とコンパクト性が同値であることを述べる．定理 11.4 より，定理 9.5 のボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理を以下のように書き換える:

定理 12.1 $\mathbf{R}$ のコンパクト集合上の実数列は，収束する部分列を含む．つまり，$\mathbf{R}$ においてコンパクトなら点列コンパクトである．

点列コンパクトの定義を復習しよう．集合 A が点列コンパクトであるとは，A 上の全ての点列が A 内に極限を持つ収束部分列を持つときにいう．さらに，ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理を下記のように書き換えよう:

定理 12.2 A を $\mathbf{R}$ のコンパクト集合とする．このとき，任意の無限部分集合が A の中に集積点を持つ．

一般に，集合 A が**可算コンパクト**であるとは，任意の無限部分集合が A の中に集積点を持つときにいう．つまり，$\mathbf{R}$ において，コンパクト，点列コンパクト，可算コンパクトは同値な条件となる．さらに，証明は省略するが，距離空間でもこの同値性は成立する．

定理 12.3 距離空間において，部分集合が (1) コンパクトであること，(2) 点列コンパクトであること，(3) 可算コンパクトであること，は同値である．

f を距離空間 X 上の実数値連続関数とする．$A \subset X$ に対して最小値問題 $\inf_{x\in A} f(x)$ を考える．当面の課題は解が存在するかどうかである．$x_1 \in A$ を任意に取る．$f(x_1) = \inf_{x\in A} f(x)$ であれば x_1 は解となる．$f(x_1) > \inf_{x\in A} f(x)$ であるとき，下限の定義から $f(x_1) > f(x_2)$ となる $x_2 \in A$ が取れる．従って，点列 $\{x_n\} \subset A$ で $f(x_n)$ が単調減少し，$f(x_n) \to \inf_{x\in A} f(x)$ なるものが存在する．ここで A をコンパクトとする．定理 12.3 より A は点列コンパクトである．従って，$\{x_n\}$ は収束部分列を持つ．その極限を $x_\infty \in A$ と書くと，$f(x_\infty) = \inf_{x\in A} f(x)$ が成立する．よって，最小値問題 $\inf_{x\in A} f(x)$ は，A がコンパクトであるとき解を持つ．解がどのようなものであるかは全く分からなくても，解が存在するかどうかを議論することは可能なのである．

次に，一様連続性について論じよう．距離空間 (X, d_X) から (Y, d_Y) への関数 f を考える．f が**一様連続**であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在し，$d_X(x_1, x_2) < \delta$ ならば $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ をみたすときにいう．一様連続性は連続性よりも強い性質である．例えば，$(0, 1)$ 上で関数 $f(x) = 1/x$ を考えよう．$x_0 \in (0, 1)$ を任意に取ってくると，$\varepsilon > 0$ に対して，δ を $\delta < \frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}$ となるように取ることにより，f の x_0 における連続性が示される．一様連続性とは，x_0 とは無関係な δ が存在することを要求している．$f(x) = 1/x$ の

場合には，x_0 を 0 に近づけると，δ も 0 に近づけなければならず一様連続性が成立しない．一般に閉区間上の連続関数は一様連続性を持つことが知られているが，この事実を距離空間上に一般化しよう．

定理 12.4 (X, d_X) がコンパクトであるとき，連続関数 $f : X \to Y$ は一様連続である．

証明. f の連続性から，任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $x_0 \in X$ に対して，ある $\delta(x_0) > 0$ が存在し,「$x \in N_X(x_0, \delta(x_0))$ ならば $f(x) \in N_Y(f(x_0), \varepsilon/2)$」が成立する．但し，$N_X, N_Y$ はそれぞれ距離空間 X, Y における開球 (ε-近傍) を表す．$\mathcal{G} = \{N_X(x, \delta(x)/2); x \in X\}$ とすると，これは X の開被覆である．X のコンパクト性より，$\mathcal{G}$ の中から有限個の元を選んで，$X = N_X(x_1, \delta(x_1)/2) \cup \cdots \cup N_X(x_N, \delta(x_N)/2)$ とできる．今，$\delta = \frac{1}{2}\min\{\delta(x_1), \ldots, \delta(x_N)\}$ として，「$d_X(x, x') < \delta$ ならば $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$」が成立することを示す．

$x \in X$ を任意に取ってくると，$x \in N_X(x_i, \delta(x_i)/2)$ なる番号 $i \in \{1, \ldots, N\}$ が取れる．このとき，冒頭で述べたように，$f(x) \in N_Y(f(x_i), \varepsilon/2)$ となる．よって，$d_X(x, x') < \delta$ ならば

$$\begin{aligned} d_X(x', x_i) &\leq d_X(x', x) + d_X(x, x_i) < \delta + \delta(x_i)/2 \\ &\leq \delta(x_i)/2 + \delta(x_i)/2 = \delta(x_i) \end{aligned}$$

を得る．つまり，$x' \in N_X(x_i, \delta(x_i))$ なので，$f(x') \in N_Y(f(x_i), \varepsilon/2)$ となる．ゆえに，

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq d_Y(f(x), f(x_i)) + d_Y(f(x_i), f(x')) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

が成立する． □

一様連続性が用いられている例として，リーマン積分を取り上げよう．リーマン積分の定義を復習し，連続実数値関数が定積分を持つことを示す．まず，有界閉区間 $[a, b]$ 上の有界関数 f を考える．f は有界であるから，ある $M > 0$ が存在して $\sup_{x \in [a,b]} |f(x)| < M$ が成立する．$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ となる分点を用意して，区間 $[a, b]$ を k 個の部分区間 $[x_{i-1}, x_i]$ に分ける．このとき，**分割** $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ を与えるという．さらに，

$$|\Delta| = \max_{1 \leq i \leq k} |x_i - x_{i-1}|$$

と定義し，これを分割 Δ の**幅**という．分割 Δ の各部分区間 $[x_{i-1}, x_i]$ から点 c_i を任意に取る．このとき，

$$S(f, \Delta, \{c_i\}) = \sum_{i=1}^{k} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

と定義し，これを**リーマン和**と呼ぶ．このリーマン和を用いて，リーマン積分を以下のように定義する．

定義 12.5 実数 α が存在して,「任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在し,$|\Delta| < \delta$ ならば任意の $\{c_i\}$ に対して $|S(f, \Delta, \{c_i\}) - \alpha| < \varepsilon$ となる」が成立しているとき,f は $[a, b]$ 上で**リーマン積分可能**であるといい,さらに α を f の $[a, b]$ 上の**定積分**といい,$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ と書く.

つまり,各部分区間から c_i をどのように選んでも,分割を細かくしたとき,より正確には $|\Delta| \to 0$ としたとき,リーマン和が極限を持つならば,その極限を $\int_a^b f(x)dx$ という記号で表現し定積分と呼ぶのである.実は,$[a, b]$ 上の連続関数はいつでもリーマン積分可能である.それを示すには,一様連続性と実数の連続性が重要な役割を果たす.この事実を定理として述べ,証明を与える.

定理 12.6 閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数 f はリーマン積分可能である.

証明. Δ を $[a, b]$ の分割とする.定理 9.1 に注意して,分割 Δ の各部分区間 $[x_{i-1}, x_i]$ における f の最大値と最小値をそれぞれ M_i, m_i,また,$[a, b]$ における最大値と最小値をそれぞれ M, m とおく.このとき明らかに,任意の $\{c_i\}$ に対して,$m(b-a) \leq S(f, \Delta, \{m_i\}) \leq S(f, \Delta, \{c_i\}) \leq S(f, \Delta, \{M_i\}) \leq M(b-a)$ が成り立つ.分割 Δ に分点を加えることにより新しい分割 Δ' を構成する.この分割 Δ' の各部分区間における f の最大値と最小値をそれぞれ M'_j, m'_j と書くと,$m_i \leq m'_j \leq M'_j \leq M_i$ であり[1],$S(f, \Delta, \{m_i\}) \leq S(f, \Delta', \{m'_j\}) \leq S(f, \Delta', \{M'_j\}) \leq S(f, \Delta, \{M_i\})$ が成り立つ.つまり,分割を細かくすると,閉区間 $[S(f, \Delta, \{m_i\}), S(f, \Delta, \{M_i\})]$ は小さくなる.ここで, $|\Delta| \to 0$ のとき $S(f, \Delta, \{M_i\}) - S(f, \Delta, \{m_i\})$ が 0 に収束することを示す.

ある部分閉区間 $[x_{i-1}, x_i]$ 上の f の最大値 M_i と最小値 m_i の差を考える.関数の一様連続性より,任意の $\varepsilon > 0$ に対して,ある $\delta > 0$ が存在し,$|x - x'| < \delta$ ならば $|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ をみたす.この δ は x に依らない.従って,$|\Delta| < \delta$ となるような分割に対して,$M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$ が常に成立する.よって,

$$
\begin{aligned}
&S(f, \Delta, \{M_i\}) - S(f, \Delta, \{m_i\}) \\
&= \sum_{i=1}^{k} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{k} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{k}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&< \sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon
\end{aligned}
$$

となり,$S(f, \Delta, \{M_i\}) - S(f, \Delta, \{m_i\})$ は $|\Delta| \to 0$ のとき 0 に収束する.従って,区間縮小法の原理から,$|\Delta| \to 0$ となる分割の減少列に対して,どの分割 Δ に対しても $\alpha \in [S(f, \Delta, \{m_i\}), S(f, \Delta, \{M_i\})]$ となる実数 α がただ一つ存在する.定義より,この α が定積分 $\int_a^b f(x)dx$ である. □

[1]分割 Δ' の j 番目の部分区間が分割 Δ の i 番目の部分区間に含まれているとする.

第13週　コンパクト距離空間と不動点定理

まずは，距離空間がコンパクトであるための必要十分条件を与えたい．定義から始めよう．(X, d) を距離空間とする．$A \subset X$ と $\varepsilon > 0$ に対して，有限集合 $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_N\}$ が A に対する **ε-ネット**であるとは，任意の $x \in A$ に対して，$d(x, b) < \varepsilon$ となる $b \in B$ が存在するときにいう．そして，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，A に対する ε-ネットが存在するとき，A を**全有界**という．

例 13.1 全有界集合は有界であるが，その逆は必ずしも成立しない．点列空間 l^2 を考える．$n \in \mathbf{N}$ に対して，e_n を第 n 項のみが 1 で，その他の項は 0 である点列とする．$A = \{e_n | n \in \mathbf{N}\}$ とする．どの $n, m \in \mathbf{N}$ に対しても $d(e_n, e_m) = \sqrt{2}$ であるから，$d(A) = \sqrt{2}$ であり A は有界である．一方，A の空でない部分集合で直径が 1 以下になるのは一点集合のみであるから，$\frac{1}{2}$-ネットは存在しない．従って，A は全有界ではない．

ここで，前半の主定理を述べよう．

定理 13.2 距離空間がコンパクトであることと，完備かつ全有界であることは必要十分である．

証明.　　必要性は以下の二つの補題から得られる．

補題 13.3 コンパクト距離空間は完備である．

証明.　　コンパクト距離空間は点列コンパクトである．従って，任意のコーシー列は収束部分列を持つ．命題 6.7(3) より，コーシー列自身も収束列であり，収束部分列と同じ極限を持つ．よって，完備である．　□

補題 13.4 距離空間上の点列コンパクト集合は全有界である．

証明.　　A を全有界でない集合とする．つまり，$\varepsilon > 0$ を十分小さく取れば，A は ε-ネットを持たない．まず，$x_1 \in A$ をとる．このとき，$d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$ なる $x_2 \in A$ が存在する．さもなければ，$\{x_1\}$ は A の ε-ネットになり矛盾．さらに，$d(x_1, x_3) \geq \varepsilon$ かつ $d(x_2, x_3) \geq \varepsilon$ なる $x_3 \in A$ が存在する．さもなければ，$\{x_1, x_2\}$ は A の ε-ネットになり矛盾．これを繰り返し，点列 $\{x_n\}$ を構成する．任意の n, m に対して，$d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ が成立するので，この点列は収束する部分列を含まない．従って，A は点列コンパクトでない．　□

次に，十分性について論じよう．一つ補題を準備する．

補題 13.5 距離空間の全有界部分集合上の任意の点列はコーシー部分列を含む．

証明.　E をある距離空間の全有界部分集合とし，その上の点列 $\{x_n\}$ がコーシー部分列を含むことを示そう．まず，E は $\frac{1}{2}$-ネットを持つので，直径が 1 以下の有限個の集合に分割できる．これらの直径 1 以下の集合のうち少なくとも一つは，$\{x_n\}$ の項を無限個含む．そのような集合を A_1 としよう．ここで，$x_{i_1} \in A_1$ となるように番号 i_1 を取る．次に，A_1 も全有界であることに注意すると，直径が $\frac{1}{2}$ 以下の有限個の集合に分割できる．これらの分割された集合の中に $\{x_n\}$ の項を無限個含むものがある．そのような集合を A_2 と書くと，$x_{i_2} \in A_2$ となる番号 $i_2 > i_1$ が取れる．以下これを繰り返すと，$d(A_n) < 1/n$ をみたす集合の縮小列 $E \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ が取れ，$x_{i_n} \in A_n$ が満たされるような部分列 $\{x_{i_n}\}$ が構成できる．この部分列は明らかにコーシー列である．□

今，X を完備かつ全有界な距離空間とする．X 上の点列は，補題 13.5 よりコーシー部分列を含む．X の完備性より，このコーシー部分列は収束列である．ゆえに，X は点列コンパクトである．□

これより不動点定理について論じる．**不動点**とは，関数 f において $f(x) = x$ となる点 x のことである．また，f がどのような条件をみたせば不動点が存在するのかを述べた定理を，一般に**不動点定理**という．ここでは三つの不動点定理を紹介する．

まずは縮小写像による不動点定理を紹介する．X を距離空間とする．関数 $f : X \to X$ が以下の条件をみたす $\alpha \in [0,1)$ を持つとき，**縮小写像**という: 任意の $x_1, x_2 \in X$ に対して $d(f(x_1), f(x_2)) \leq \alpha d(x_1, x_2)$.

定理 13.6 完備距離空間 X 上の縮小写像 f は不動点を唯一つ持つ．つまり，$f(x) = x$ なる $x \in X$ が一意的に存在する．

証明.　まずは，X の任意の点 x_0 における f の連続性を示そう．$\varepsilon > 0$ とする．$d(x, x_0) < \varepsilon$ であるとき，$\alpha \in [0,1)$ が存在して，$d(f(x), f(x_0)) \leq \alpha d(x, x_0) < \alpha\varepsilon < \varepsilon$ が成立する．ゆえに f は連続．

X の任意の点 x_0 を取る．x_0 は f の不動点でないとしよう．$n \in \mathbf{N}$ に対して，$x_n = f^n(x_0)$ として，X 上の点列 $\{x_n\}$ を定義する．この点列がコーシー列であることを示そう．i, j を自然数とする．三角不等式から

$$\begin{aligned} d(f^{i+j}(x_0), f^i(x_0)) &\leq \alpha d(f^{i+j-1}(x_0), f^{i-1}(x_0)) \leq \ldots \leq \alpha^i d(f^j(x_0), x_0) \\ &\leq \alpha^i \left\{ \sum_{k=1}^{j} d(f^k(x_0), f^{k-1}(x_0)) \right\} \end{aligned}$$

が成立する．ここで $d(f^k(x_0), f^{k-1}(x_0)) \leq \alpha^{k-1} d(f(x_0), x_0)$ に注意すると，

$$d(f^{i+j}(x_0), f^i(x_0)) \leq \alpha^i \sum_{k=1}^{j} \alpha^{k-1} d(f(x_0), x_0) \leq \frac{\alpha^i}{1-\alpha} d(f(x_0), x_0)$$

を得る．$\varepsilon > 0$ を任意に取る．α は1より小さい正数なので，十分大きな番号 n_0 をとると，$\alpha^{n_0} < \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{d(f(x_0),x_0)}$ が成立する．そこで，$n_0 \le i$ とすれば，上記の計算より $d(f^{i+j}(x_0), f^i(x_0)) \le \frac{\alpha^i}{1-\alpha} d(f(x_0), x_0) < \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{(1-\alpha)d(f(x_0),x_0)} d(f(x_0), x_0) = \varepsilon$ となり，点列 $\{x_n\}$ はコーシー列となる．

X は完備なので，$\{x_n\}$ は X 内に極限を持つ．それを x と書こう．$x \in X$ が不動点であることを示す．f は連続なので点列連続である．よって，$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x$ が成立する．

最後に，不動点の一意性を示そう．x 以外の不動点 y が存在するとしよう．このとき，$d(x,y) = d(f(x), f(y)) \le \alpha d(x,y)$ が成立する．これは $\alpha < 1$ に矛盾．よって，不動点は一意である． □

次に縮小写像に依らない不動点定理を紹介する．まず命題を一つ示す．

命題 13.7 有界閉区間 $[a,b]$ から $[a,b]$ への連続関数 f は不動点を持つ．

証明． $g(x) = f(x) - x$ とおくと，$f(a) > a$ より $g(a) > 0$ であり，一方 $f(b) < b$ より $g(b) < 0$ である．中間値の定理より，$g(x) = 0$ なる $x \in (a,b)$ が存在する．よって，f は不動点を持つ． □

命題 13.7 における閉区間 $[a,b]$ を $\mathbf{R}^d$ 上の有界凸集合まで拡張しよう．ここで，集合 A が**凸**であるとは，$x, y \in A, \lambda \in [0,1]$ ならば $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$ であるときにいう．この結果は**ブラウアーの不動点定理**と呼ばれ，数理経済学において非常に重要な定理である．ここでは証明なしで紹介しておく．

定理 13.8 (ブラウアーの不動点定理) ユークリッド空間上の有界凸集合からそれ自身への連続関数は不動点を持つ．

一般に，ブラウアーの不動点定理を無限次元に拡張することはできないことを注意しておく．しかし，ノルム空間を考える限り不動点定理は成立する．最後に，証明なしで**シャウダーの不動点定理**を紹介しよう．その前にノルム空間の定義を与えておく．V を線形空間とする．V 上の実数値関数 $\|\cdot\|$ で
(1) $\|v\| \ge 0$，かつ，$\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ $(v \in V)$,
(2) $\|av\| = |a|\|v\|$ $(a \in \mathbf{R})$,
(3) $\|v_1 + v_2\| \le \|v_1\| + \|v_2\|$ $(v_1, v_2 \in V)$
をみたすものを**ノルム**といい，$(V, \|\cdot\|)$ を**ノルム空間**という．ノルム空間は $d(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\|$ とおくことにより距離空間になる．

定理 13.9 (シャウダーの不動点定理) ノルム空間上の凸集合からそのコンパクト部分集合への連続関数は不動点を持つ．

第 14 週　連続関数空間

位相空間 X 上の実数値連続関数の全体を $C(X)$ とおく．すなわち，$C(X) = \{f | f : X \to \mathbf{R},\ 連続関数\}$ である．

命題 14.1 X をコンパクト位相空間とする．このとき，$f, g \in C(X)$ に対して，$d_C(f,g) = \max_{x\in X} |f(x) - g(x)|$ とおくと，$(C(X), d_C)$ は完備距離空間になる．

証明.　まずは，$(C(X), d_C)$ が距離空間であることを示そう．定理 11.8 より，$d_C(f,g) < \infty$ が任意の $f, g \in C(X)$ に対して成立する．従って，d_C は実数値関数である．三角不等式を示せば十分である．任意の $f, g, h \in C(X)$ と任意の $z \in X$ に対して，

$$\begin{aligned}&\max_{x\in X} |f(x) - g(x)| + \max_{y\in X} |g(y) - h(y)| \\ \geq\ & |f(z) - g(z)| + |g(z) - h(z)| \geq |f(z) - h(z)|\end{aligned}$$

が成立する．$\max_{z\in X}$ を取れば，$d_C(f,g) + d_C(g,h) \geq d_C(f,h)$ を得る．

次に完備性について論じよう．$\{f_n\}$ を $C(X)$ のコーシー列とする．$\{f_n\}$ が収束列であることを示す．まず，任意の $x \in X$ に対して $\{f_n(x)\}$ が $\mathbf{R}$ 上のコーシー列になることから，$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が定義可能である．そこで，$f \in C(X)$ であり，かつ $d_C(f_n, f) \to 0$ であることを示す．$\varepsilon > 0$ を任意に取る．ある番号 $n_0 = n_0(\varepsilon)$ が存在して，任意の $n \geq n_0$ に対して $d_C(f_n, f_{n_0}) < \varepsilon/6$ が成立する．また，任意の $y \in X$ に対して，十分大きな n を取り，$|f(y) - f_n(y)| < \varepsilon/6$ とできることから，$|f(y) - f_{n_0}(y)| < \varepsilon/3$ が成立. 従って，f が連続であれば，$d_C(f, f_n) \to 0$ となる．f が任意の $x \in X$ で連続であることを示そう．f_{n_0} の連続性より，x の近傍 $N(x)$ が存在し，任意の $y \in N(x)$ に対して $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| < \varepsilon/3$ が成立する．以上より，任意の $y \in N(x)$ に対して，$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$ となる．よって，$f \in C(X)$.　□

一般に，X 上の関数列 $\{f_n\}$ が $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f(x) - f_n(x)| = 0$ であるとき，$\{f_n\}$ は f に**一様収束**しているという．この定義は,「任意の $\varepsilon > 0$ に対してある番号 $n_0 = n_0(\varepsilon)$ が存在し，任意の $n \geq n_0$ と任意の $x \in X$ に対して $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ が成立する」と書き換えることもできる．一様性とは，番号 n_0 が x に依存せずに取れることを意味する．そして，$C(X)$ 上の関数列が距離 d_C の意味で収束することと，一様収束することは，同値であることも容易に分かる．

$C(X)$ 上の関数列がいつ一様収束するのかといった問題は，解析学の様々な場面で重要となる．この答えとしてアスコリ・アルツェラの定理を証明なしで紹介する．まず，定義を与えよう．以下，X をコンパクト位相空間，$F \subset C(X)$ とする．

定義 14.2 (1) ある正数 $M > 0$ が存在して，任意の $f \in F$ と任意の $x \in X$ に対して $|f(x)| < M$ となるとき，F は**一様有界**であるという．
(2) 任意の $x \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して，x を含むある近傍 $N(x)$ が存在して「任意の $f \in F$ と任意の $y \in N(x)$ に対し $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$」となるとき，$F$ は**同程度連続**であるという．

定理 14.3 (アスコリ・アルツェラの定理) $\overline{F}$ がコンパクトであることと，F が一様有界かつ同程度連続であることは同値である．

系 14.4 (ディニの定理) $C(X)$ 上の列 $\{f_n\}$ が，(1) 任意の $x \in X$ と $n \in \mathbf{N}$ に対し $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$，(2) ある $f \in C(X)$ が存在して，任意の $x \in X$ に対して $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$，をみたすとき f_n は f に一様収束する．

ここで，定理 14.3 の応用例を二つ紹介する．まず初めは常微分方程式の解の存在定理を示そう．未知関数 $y = y(x)$ に対する常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

を考える．

定理 14.5 $r > 0, R > 0$ とする．$f(x, y)$ が $D = \{(x, y); |x - x_0| \leq r, |y - y_0| \leq R\}$ 上で定義された実数値連続関数であるとき，$|x - x_0| \leq \delta$ において，上記の初期値問題の局所解 $y(x)$ が存在する．但し，$\delta = \min\{r, R/M\}$，$M = \max_{(x,y)\in D} |f(x, y)|$ とする．

証明. 簡単のため $x_0 = 0$ とする．コーシーの折れ線近似を用いて示す．詳しくは，高橋陽一郎「力学と微分方程式」を参照せよ．

$\varepsilon > 0$ とし，$(k\varepsilon, y) \in D$ を満たす整数 k と実数 y の組に対して，$F_k(y, \varepsilon) = f(k\varepsilon, y)$ とおく．$y_0^\varepsilon = y_0$，$y_{k+1}^\varepsilon = y_k^\varepsilon + \varepsilon F_k(y_k^\varepsilon, \varepsilon)(k = 0, 1, 2, \ldots)$，$y_{k-1}^\varepsilon = y_k^\varepsilon - \varepsilon F_k(y_k^\varepsilon, \varepsilon)(k = 0, -1, -2, \ldots)$ により，数列 $\{y_k^\varepsilon\}_{|k|\leq r/\varepsilon}$ を定める．これより，折れ線 $y^\varepsilon(x)$ を，$k\varepsilon \leq x \leq (k+1)\varepsilon$ であるとき，$y^\varepsilon(x) = (k+1-\varepsilon^{-1}x)y_k^\varepsilon + (\varepsilon^{-1}x - k)y_{k+1}^\varepsilon$ とおくことにより定める．但し，y^ε の定義域は，$|x| \leq \delta$ である．$F = \{y^\varepsilon | \varepsilon > 0\}$ とおくと，$|y^\varepsilon(x) - y_0| \leq R$ となり，F は一様有界である．また，y^ε の定義から $|y^\varepsilon(x_1) - y^\varepsilon(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$ であり，F は同程度連続である．従って，定理 14.3 と定理 12.3 より，$\overline{F}$ は点列コンパクトとなる．よって，0 に収束する正数の減少列 ε_k が取れ，y^{ε_k} はある連続関数 y に一様収束する．一方，証明は省略するが，$\lim_{\varepsilon\to 0} \left| y^\varepsilon(x) - y_0 - \int_0^x f(z, y^\varepsilon(z))dz \right| = 0$ が成立する．従って，$\left| y(x) - y_0 - \int_0^x f(z, y(z))dz \right| = 0$ を得て，y は局所解となる． □

注意 14.6 (解の一意性について) 上記の微分方程式が以下の条件をみたすとする：ある定数 $L > 0$ が存在して，任意の $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$ に対して $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ をみたす．この条件を，**リプシッツ条件**という．$|y - y_0| \leq R$ をみたす $|x - x_0| \leq \delta$ 上の連続関数 y の全体を $\mathcal{C}'$ とし，$d'(y_1, y_2) = \max_{|x-x_0|\leq\delta} e^{-2L(x-x_0)}|y_1(x) - y_2(x)|$ とおくと，$(\mathcal{C}', d')$ は完備距離空間になる．今，$p : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}'$ を $p(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(z, y(z))dz$ と定めると，$\mathcal{C}'$ 上の縮小写像となり，定理 13.6 より不動点を持つ．この不動点が微分方程式の一意解となる．詳しくは，増田久弥「非線形数学」を参照せよ．

次に，ワイエルシュトラスの多項式近似定理を紹介する．これは，閉区間上の連続関数は多項式関数によっていくらでも近似できることを示すものである．例えば，区間 $[0,1]$ 上で関数 $f(x) = \sqrt{x}$ を考えると，多項式関数の列 $\{p_n(x)\}$ を

$$\begin{cases} p_1(x) & = & x \\ p_{n+1}(x) & = & p_n(x) + \frac{1}{2}(x - p_n(x)^2) \end{cases}$$

と定義すると，p_n が f に一様収束することが示せる．$[0,1]$ 上の多項式関数の全体を $P([0,1])$ とすると，$\overline{P}([0,1]) = C([0,1])$ と主張するのが多項式近似定理である．もちろん，閉包は距離空間 $(C([0,1]), d_C)$ の意味でとる．

定理 14.7 (ワイエルシュトラスの多項式近似定理) 閉区間 $[0,1]$ 上の任意の連続関数 $f \in C([0,1])$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $[0,1]$ 上の多項式関数 p が存在して，任意の $x \in [0,1]$ に対して $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ となる．

証明． 以下，$P = P([0,1])$，$C = C([0,1])$ とする．

任意の $f \in P$ に対して，$f_n(x) = p_n\left(\frac{f(x)^2}{M^2}\right)$ とおく．但し，p_n は上述の $\sqrt{x}$ への近似関数，$M = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$ とする．系 14.4 より $\lim f_n = |f|/M$ を得る．つまり，$|f| \in \overline{P}$ である．$\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$ なので，$f, g \in P$ ならば $\max\{f, g\} \in \overline{P}$ である．同様に，$\min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$ より $\min\{f, g\} \in \overline{P}$ も成立する．さらに，この議論を繰り返して，$f_1, f_2, , \ldots, f_n \in P$ であるとき，$\max\{f_1, f_2, , \ldots, f_n\}, \min\{f_1, f_2, , \ldots, f_n\} \in \overline{P}$ を得る．

$f \in C$ と $\varepsilon > 0$ を任意に取り，$x_0 \in [0,1]$ を固定する．任意の $x \in [0,1]$ に対して，ある $g_x \in P$ が存在し，$g_x(x_0) = f(x_0), g_x(x) = f(x)$ が成立する．このとき，x の開近傍 $N(x)$ が取れて，「$y \in N(x)$ ならば $f(y) - \varepsilon < g_x(y)$」となる．$[0,1]$ のコンパクト性から，有限個の $x_1, \ldots, x_n \in [0,1]$ が存在し，$[0,1] = \bigcup_{i=1}^{n} N(x_i)$ となる．このとき，$h = \max\{g_{x_1}, \ldots. g_{x_n}\}$ とおくと，上記で示したように $h \in \overline{P}$ であり，$h(x_0) = f(x_0)$ かつ，任意の $x \in [0,1]$ に対して $f(x) - \varepsilon < h(x)$ をみたす．h は x_0 に依存しているので，改めて h_{x_0} と書こう．このとき，x_0 の開近傍 $N'(x_0)$ が存在し，「$y \in N'(x_0)$ ならば $h_{x_0}(y) < f(y) + \varepsilon$」をみたす．再び $[0,1]$ のコンパクト性より，有限個の $x'_1, \ldots, x'_m \in [0,1]$ が取れて $[0,1] = \bigcup_{i=1}^{m} N'(x'_i)$ となる．ここで，$h = \min\{h_{x'_1}, \ldots. h_{x'_m}\}$ とおけば，$h \in \overline{P}$ となるから，任意の $x \in [0,1]$ に対して $|h(x) - f(x)| < \varepsilon$ を得る．□