

2006年度 入ゼミ試験問題

(30 分)

注意事項

- ・ 筆記用具以外の持込は不可
- ・ 答案用紙は持ち帰らないこと
- ・ 計算の途中経過もすべて記述すること

1.

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

を計算せよ。

2.

f, g は以下の条件を満たす微分可能な関数とする。

1. $f(0) = 0, g(0) = 1.$
2. $f'(x) = g(x), g'(x) = -f(x).$

この時、 $f^2(x) + g^2(x)$ を求めよ。

3.

関数 f を

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

とする。この時、次の問いに答えよ。

1. $\sin x$ のマクローリン展開が

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

で与えられることを確かめよ。

2. $f'(0)$ を求めよ。

以上

2007年度 入ゼミ試験問題

(30 分)

注意事項

- ・ 筆記用具以外の持込は不可
- ・ 答案用紙は持ち帰らないこと
- ・ 計算の途中経過もすべて記述すること

1.

$$\int_1^2 (x^2 + x + 1) dx$$

を計算せよ.

2.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\log x}$$

を求めよ.

3.

$y = \sin x$ ($-\pi/2 < x < \pi/2$) の逆関数 $x = \arcsin y$ の導関数を求めよ.

以上

2008年度 入ゼミ試験問題

(30 分)

注意事項

- ・ 筆記用具以外の持込は不可
- ・ 答案用紙は持ち帰らないこと
- ・ 計算の途中経過もすべて記述すること

1.

$$\int_2^3 \frac{2x-1}{x^2-x} dx$$

を計算せよ.

2.

$p > 1$ とし, q は $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たすものとする.

(1) $x \geq 0$ 上の関数

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{1}{q} - x$$

の最小値と最小値を取る x の値を求めよ.

(2) 任意の正数 a, b に対して,

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$$

であることを (1) の結果を用いて示せ.

3.

$$\lim_{x \downarrow 0} x \log x$$

を求めよ. 但し, $\log$ は自然対数とする.

以上

2009年度 入ゼミ試験問題

(30 分)

注意事項

- ・筆記用具以外の持込は不可
- ・答案用紙は持ち帰らないこと
- ・計算の途中経過も全て記述すること

1.

以下の定積分を計算せよ．

$$(1) \int_1^2 e^x dx, \quad (2) \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx.$$

2.

以下の極限を $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ という事実を用いて求めよ．

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

3.

関数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ に関する以下の問いに答えよ．

(1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = 0$$

となる理由を簡単に説明せよ．

(2)

$$\int_0^{\infty} x f(x) dx$$

を計算せよ．((1) とはまったく関係ない)

2012年度 入ゼミ試験問題

注意事項

- 制限時間は2時間とする．途中退席は自由．
- 筆記用具以外の持込は不可
- 答案用紙は持ち帰らないこと
- 計算の途中経過も全て記述すること
- 合格ラインは5題中3題以上完答
- 合格者は第1回目のゼミのときまでに熊谷隆著「確率論」(共立出版)を購入しておくこと

1.

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx$$

を求めよ．

2.

$$\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

を求めよ．

3. $x > 0$ に対して，

$$\frac{d}{dx} x^x$$

を求めよ．

4. f を $\mathbf{R}$ (実数全体) 上の連続関数で何回でも微分でき，

- $f(0) = 1$,
- 任意の $x, y \in \mathbf{R}$ に対して $f(x)f(y) = f(x+y)$

を満たすものとする．任意の $x \in \mathbf{R}$ に対して以下が成立することを示せ：

- (a) $f(x) > 0$.
- (b) $f'(x) = f(x)f'(0)$.

2013年度 入ゼミ試験問題

注意事項

- 制限時間は2時間とする。途中退出は自由。
- トイレに行きたくなったり具合が悪くなった場合は、監督者に申し出ること。
- 筆記用具以外の持込は不可。
- 答案用紙は持ち帰らないこと。
- 計算の途中経過も全て記述すること。
- 最初の問題が不正解の場合は不合格とする。
- 最初の問題が正解で、残り5題(4の(a), (b)はそれぞれ1題とカウントする)中2題以上正解の場合は、合格とする。
- 最初の問題が正解で、全体で2題以下しか正解していない場合は、他の受験生の出来も考慮の上で可否を判断する。
- 合格者は、
シナイ著，森真訳「シナイ確率論入門コース」(丸善)
吹田，新保著「理工系の微分積分学」(学術図書出版)」
を購入し，第1回目のゼミのときに持参すること。

1.

$$\int_1^4 x^{-\frac{1}{2}} dx$$

を求めよ.

2. 任意の実数 x に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

であることを用いて,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$$

を求めよ.

3. x を絶対値が 1 より小さい実数とする. このとき,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$$

が成立することを用いて,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

を示せ. 但し, 対数は自然対数である.

4. 関数 $y = f(x)$ に関して, その定義域全体で

$$x = y - \frac{y^2}{4}$$

が成立しているものとする. 但し, 値域は $(0, 2)$ とする. 以下の問いに答えよ.

(a) $f(x)$ の定義域を定めよ.

(b) $f(x)$ を求めよ.

5. 分数 $\frac{1}{3}$ を小数で表示すると $0.333\cdots$ となる. つまり, $\frac{1}{3} = 0.333\cdots$ が成立する. この両辺に 3 を掛けると,

$$1 = 0.999\cdots \tag{1}$$

を得る. 式 (1) は何となく矛盾を含んでいるようにも見える. 式 (1) が正しいと思うならば, 上記の議論以外の方法でその根拠を明らかにせよ. また, 式 (1) が正しくないと思うのであれば, 上記の議論のどこに誤りがあるのか指摘せよ.

以上

2014年度 入ゼミ試験問題

注意事項

- 試験時間は 100 分とする．途中退出は自由．
- トイレに行きたくなったり具合が悪くなった場合は，監督者に申し出ること．
- 筆記用具以外の持込は不可．
- 答案用紙は持ち帰らないこと．
- 計算の途中経過も全て記述すること．
- 最初の 3 問のうち 1 問でも不正解の場合は不合格とする．
- 合格者は，
吹田，新保著「理工系の微分積分学」(学術図書出版)
を購入し，第 1 回目のゼミのときに持参すること．

1. $\int_0^1 x^3 dx$ を計算せよ．

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k}$ を求めよ．

3. $\frac{d}{dx} x^2 = 2x$ を示せ．

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ を示せ．

5. 標準正規分布の密度関数の積分が 1 に成ること，つまり， $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$
であることを利用し， $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ を計算せよ．

6. 任意の実数列 $a_1, a_2, \dots$ 及び $b_1, b_2, \dots$ と任意の自然数 n に対して，

$$\prod_{i=1}^n a_i - \prod_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n a_1 \cdots a_{i-1} (a_i - b_i) b_{i+1} \cdots b_n$$

が成立することを示せ．

以上

2015年度 入ゼミ試験問題

注意事項

- 試験時間は 100 分とする．途中退出は自由．
- トイレに行きたくなったり具合が悪くなった場合は，監督者に申し出ること．
- 筆記用具以外の持込は不可．
- 答案用紙は持ち帰らないこと．
- 計算の途中経過も全て記述すること．
- 合格者は，
吹田，新保著「理工系の微分積分学」(学術図書出版)
を購入し，第 1 回目のゼミのときに持参すること．

1. 任意の自然数 n と実数列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ に対して，

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n a_i^2$$

が成立することを示せ．

2. 1 の別証明を与えよ．

3. $a, b > 0$ とする．このとき，

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \log(b/a)$$

を示せ．但し， $\log$ は自然対数とする．

4. $x^{1/3}$ の微分を用いて， $\frac{80}{27}$ が $26^{1/3}$ の近似値であることを示せ．

以上

2016年度 入ゼミ試験問題

注意事項

- 試験時間は 100 分とする．途中退出は自由．
- トイレに行きたくなったり具合が悪くなった場合は，監督者に申し出ること．
- 筆記用具以外の持込は不可．
- 答案用紙は持ち帰らないこと．
- 途中の計算も記述すること．
- 論述力を重視するので，証明はできるだけ詳しく正確にきちんと記述すること．
- 合格者は，
吹田，新保著「理工系の微分積分学」(学術図書出版)
を購入し，第 1 回目のゼミのときに持参すること．

実数の全体を $\mathbb{R}$ ，1 次関数の全体を $\mathcal{L}$ で表す．つまり， $\mathcal{L}$ は，2 つの実数 a, b によって $l(x) = ax + b$ と表現できる関数 $l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ の全体である．さらに， $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して，

$$\mathcal{L}_f := \{l \in \mathcal{L} \mid \text{任意の } x \in \mathbb{R} \text{ に対して } l(x) \leq f(x)\}$$

と定義する． $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(x) = \sup\{l(x) \mid l \in \mathcal{L}_f\}$$

を満たすとき，**条件 C** を満たすという．以下の問いに答えよ．

1. $\mathcal{L}$ が線型空間を成すことを示せ．
2. $f(x) = |x|$ とする．
 - (a) $\mathcal{L}_f$ を求めよ．
 - (b) f が条件 C を満たすことを確認せよ．
3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は 2 階微分可能で，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f''(x) \geq 0$ が成立しているものとする．このとき， f は条件 C を満たすことを示せ．
4. 条件 C を満たす関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して以下が成立することを証明せよ：
任意の $x, y \in \mathbb{R}$ と任意の $\alpha \in [0, 1]$ に対して

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

以上

2017年度 入ゼミ試験問題

注意事項

- 試験時間は 100 分とする．途中退出は自由．
- トイレに行きたくなったり具合が悪くなった場合は，監督者に申し出ること．
- 本試験は「持込不可」である．細かな点については常識の範囲内で．
- 答案用紙は持ち帰らないこと．
- 途中の計算も記述すること．
- 論述力を重視するので，証明や途中計算はできるだけ詳しく正確にきちんと記述すること．
- 合格者は，
吹田，新保著「理工系の微分積分学」(学術図書出版)
を購入し，第 1 回目のゼミのときに持参すること．

1. 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_{-2}^x (2|t| - t) dt$$

により定義する．関数 $f(x)$ のグラフを描け．

2. $x > 0$ に対して

$$g(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

とおくとき， $g(10000)$ の値を求めよ．

(言うまでもないが，数値まで求める必要はない．)

3. 以下の条件を満たす $[0, 1]$ 上の実数値関数の例を挙げよ．

(a) $(0, 1)$ 上微分可能である．

(b) 最大値を持たない．

4. 以下の値を求めよ：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right).$$

5. x, y, z を実数とする．このとき，

$$\frac{|x - z|}{1 + |x - z|} \leq \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} + \frac{|y - z|}{1 + |y - z|}$$

が成立することを証明せよ．

以上

2018年度 入ゼミ試験問題

注意事項

- 試験時間は 100 分とする。途中退出は自由。
- トイレに行きたくなったり具合が悪くなった場合は、監督者に申し出ること。
- 本試験は「持込不可」である。細かな点については常識の範囲内で。
- 答案用紙は持ち帰らないこと。
- 途中の計算も記述すること。
- 論述力を重視するので、証明や途中計算はできるだけ詳しく正確にきちんと記述すること。
- 合格者は、
吹田，新保著「理工系の微分積分学」(学術図書出版)
を購入し，第 1 回目のゼミのときに持参すること。

1. n を 2 以上の自然数とし、 $z = \cos \frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{2\pi}{n}$ とおく。このとき、 $\sum_{k=0}^{n-1} z^k$ の値を求めよ。
2. $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}$ の値を求めよ。
3. 3 次方程式 $8x^3 - 6x - 1 = 0$ は有理数の解を持たないことを証明せよ。
4. 以下を計算せよ。ただし、 $\log$ は自然対数である。

(a) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \log x} dx.$

(b) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log k}.$

以上