2018年度 解析学IIa 試験対策問題集

June 6, 2018

1 試験対策用問題

問題 1 集合列 $A_1, A_2, A_3, \ldots$ に対して、

$$(\limsup_{i\to\infty} A_i)^c = \liminf_{i\to\infty} A_i^c$$

を示せ。

問題 2 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ は $\mathbf{R}$ と対等であることを示せ。

問題 3

1. 任意個の $\mathbf{R}$ の開集合の和集合は開集合であることを証明せよ。
2. $[0,1] \times [0,1]$ が $\mathbf{R}^2$ 上の閉集合であることを示せ。
3. $[0,1]$ 上の有理数の全体を $\mathbf{Q}[0,1]$ と書くとき、$\mathbf{Q}[0,1]$ の集積点の全体、つまり導集合を求めよ。
4. 一点集合 $\{x\}$ の集積点を求めよ。

問題 4

1. 関数 $f : [0,1] \to [0,1]$ を、$x \in [0,1]$ が有理数ならば $f(x) = 1$ であり、そうでないなら $f(x) = 0$ となるものとする。このとき、f が連続でないことを証明せよ。さらに、リーマン積分可能でないことを確認せよ。
2. $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = 0, \\ 1/p & \text{if } x = q/p (\text{既約分数}), \\ 0 & \text{if } x \notin \mathbf{Q}, \end{cases}$$

   で定義される関数は、有理数で不連続、無理数で連続であることを証明せよ。

問題 5 $\mathbf{R}^2$ 上の 2 点 $a = (a_x, a_y)$ と $b = (b_x, b_y)$ に対して、$d(a,b) = \max\{|a_x - b_x|, |a_y - b_y|\}$ と定義する。

1. 関数 d が距離関数であることを証明せよ。
2. 距離空間 $(\mathbf{R}^2, d)$ の任意の開集合 A に対して、$A \subset S$ を満たす通常の意味での $\mathbf{R}^2$ 上の開円盤 S が存在することを示せ。

問題 6 (X,d) が距離空間であるとき、$e(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ も距離であることを示せ。

問題 7 X を空でない集合とし、$x,y\in X$ に対して、$d(x,y)=1$, *if* $x\neq y$; $=0$, *if* $x=y$ と定義する。

1. 関数 d が距離関数であることを確認せよ。
2. $x\in X$ を中心とする開球を求めよ。
3. $x\in X$ を含む開集合を求めよ。
4. この距離空間が完備であることを証明せよ。

問題 8 $[0,1]$ 上の連続関数の全体 $C[0,1]$ を考える。$f,g\in C[0,1]$ に対して、$d(f,g)=\sqrt{\int_0^1(f(x)-g(x))^2dx}$ と定義するとき、$(C[0,1],d)$ が距離空間であることを示せ。*(これを厳密な意味で議論するためにはルベーグ積分論が必要である。)*

問題 9 実数の点列 $p=(p_k)_{k\geq 1}$ で $\sum_{k=1}^{\infty}p_k^2<\infty$ となるものの全体を l^2 と書くことにする。今、$p,q\in l^2$ に対して、$d(p,q)=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(p_k-q_k)^2}$ と定義するとき、以下の問いに答えよ。

1. 関数 d が距離関数であることを確認せよ。
2. (l^2,d) が完備であることを示せ。
3. $\|p\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}p_k^2}$ と定義し、$A=\{p\in l^2|\|p\|\leq 1\}$ とおく。このとき、A が全有界でないことを証明せよ。

問題 10 $(X,\mathcal{U})$ を位相空間とし、$A\subset X$ とする。このとき、A の点でない A の集積点は、A の境界点であることを示せ。

問題 11 密着位相空間 X を考える。

1. X のいかなる部分空間も密着位相であることを示せ。
2. $x\in X$ を集積点に持たない集合をすべて挙げよ。*(ヒント:二つある)*

問題 12

1. $\sqrt{5}$ を定義する *(*$\mathbf{R}$ の*)* デデキントの切断を与えよ。
2. $\sqrt{5}$ が有理数でないことを説明せよ。

問題 13 ハウスドルフ空間の一点集合は閉集合であることを示せ。

問題 14 X を無限集合とする。$\mathcal{U}=\{U|U^c\subset X$ は有限 $\}\cup\{\emptyset\}$ とせよ。

1. $(X,\mathcal{U})$ は位相空間であることを示せ。
2. $(X,\mathcal{U})$ は T_1-空間であることを示せ。
3. この位相における収束列 $\{x_n\}$ は、y を極限とするならば、$x_1,x_2,\ldots,x_{n_0},y,y,y,\ldots$ のような形を取ることを確認せよ。

問題 15 1. $\mathbf{R}^2$ の部分集合

$$X = \{(0,y)|0 < y \leq 1\} \cup \{(1/n,y)|n \in \mathbf{N}, 0 \leq y \leq 1\}$$

は連結でないことを示せ。

2. $\mathbf{R}^2$ の部分集合 $X \cup \{(x,0)|0 < x \leq 1\}$ は連結であることを示せ。

問題 16 U を $\mathbf{R}$ 上の開集合とし、K を U に含まれるコンパクト集合とする。このとき、ある正数 $\varepsilon > 0$ が存在して任意の $t \in K$ に対して $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subset U$ と成ることを証明せよ。

問題 17 1. 距離空間上のコンパクト集合は閉集合であることを証明せよ。

2. 距離空間 (X,d) 上の 2 つのコンパクト集合 A_1, A_2 に対して、$A_1 \cap A_2$ も再びコンパクトになることを証明せよ。

問題 18 $\{a_n\}$ を収束実数列とし、b をその極限とする。$A = \{a_n|n \in \mathbf{N}\}$ とせよ。

1. $A \cup \{b\}$ はコンパクトであることを示せ。

2. A がコンパクトならば、$b \in A$ であることを証明せよ。

問題 19 $(0,1]$ 上の関数 $f(x) = 1/\sqrt{x}$ が一様連続でないことを示せ。

問題 20 距離空間内のコーシー列は全有界であることを示せ。

2 過去のレポート問題

本章は、過去 2 年分のレポート問題を集めたものである。但し、2016 年度はレポートを 3 回出題した。

2.1 2017 年度

1. $\mathbb{R}^2$ 上の 2 点 $x = (x_1, x_2)$ と $y = (y_1, y_2)$ に対して，

$$d(x,y) := |x_1 - y_1| + \mathbf{1}_{\{x_2 \neq y_2\}}$$

と関数 $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を定義するとき，$(\mathbb{R}^2, d)$ は距離空間となることを証明せよ．ただし，$\mathbf{1}_{\{x_2 \neq y_2\}}$ は，$x_2 = y_2$ のとき 0，$x_2 \neq y_2$ のとき 1 を取るものとする．

2. 以下の関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が 0 で不連続であることを示せ．

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0, \\ 0 & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

3. $\mathbb{R}$ 上の部分集合の族 $\mathcal{U} := \{U | U^c \subset \mathbb{R} \text{ は可算 }\} \cup \{\emptyset\}$ に対し，以下の問いに答えよ．

   (a) $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ は位相空間であることを示せ．

   (b) $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ はハウスドルフ空間でないことを示せ．

   (c) 点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ がこの位相において y に収束するとき，有限個の $n \in \mathbb{N}$ を除いて $x_n = y$ であることを証明せよ．

2.2　2016 年度第 1 回

1. 　X と Y を集合とし，写像 $f : X \to Y$ を考える．以下の問いに答えよ．

   (a) X と Y を $\mathbf{R}$ として，$A \subset \mathbf{R}$ が $f^{-1}(f(A))$ の真部分集合となるような (f と A の) 例を挙げよ．

   (b) f が単射であれば，任意の $A \subset X$ に対して，$A = f^{-1}(f(A))$ となることを示せ．

2. $[0,1]$ 上の有理数の全体を $\mathbf{Q}[0,1]$ と書くとき，$\mathbf{Q}[0,1]$ の集積点の全体，つまり導集合を求めよ．

3. 　$\mathbf{R}^2$ 上の 2 点 $a = (a_x, a_y)$ と $b = (b_x, b_y)$ に対して，$d(a,b) = \max\{|a_x - b_x|, |a_y - b_y|\}$ と定義する．

   (a) 関数 d が距離関数であることを証明せよ．

   (b) 距離空間 $(\mathbf{R}^2, d)$ の任意の空でない開集合 A に対して、$S \subset A$ を満たす通常の意味での $\mathbf{R}^2$ 上の開円盤 S が存在することを示せ．

4. X を空でない集合とし，$x, y \in X$ に対して

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \neq y, \\ 0, & \text{if } x = y \end{cases}$$

   と定義する．以下の問いに答えよ．

   (a) (X, d) が距離空間になることを示せ．

   (b) X の部分集合は全て開集合となることを示せ．

5. 実数 $\mathbf{R}$ の通常の位相を考える．$A := \{x \in \mathbf{R} \mid |x| < 0.1\}$, $B := \{2^{-n} \mid n \in \mathbf{N}\}$ とおく．以下の問いに答えよ．

   (a) $A \cup B$ の孤立点を列挙せよ．

   (b) $A \cup B$ の導集合を求めよ．

   (c) 0.11 が $A \cup B$ の外点であることを示せ．

2.3　2016 年度第 2 回

1. 以下で定義される関数 f が 0 で連続であることを証明せよ．

$$f(x) = \begin{cases} x\cos(1/x) & \text{if } x \neq 0, \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

   余力があれば，f の 0 における微分可能性について議論せよ．

2. 数列 $\{\log(1 + \frac{1}{n})\}_{n \geq 1}$ の極限が 0 になることを示せ．余力があれば，数列 $\{n \log(1 + \frac{1}{n})\}_{n \geq 1}$ や $\{\frac{1}{n} \log(\frac{1}{n})\}_{n \geq 1}$ の極限についても考察せよ．

3. $\mathbf{R}$ の通常の位相を考える．以下の条件を満たす $A \subset \mathbf{R}$ の例を挙げよ: (a) A の全ての点が孤立点である．(b) A は集積点を一つだけ持つ．

4. X を無限集合，$\mathcal{U} = \{U | U^c \subset X \text{ は可算 }\} \cup \{\emptyset\}$ とする．このとき，$(X, \mathcal{U})$ が位相空間であることを示せ．

2.4 2016 年度第 3 回

1. 自然対数 e を定義するデデキントの切断を与えよ．
2. $\mathbf{R}$ 上の 2 点集合 $A = \{x_1, x_2\}, x_1 \neq x_2$ を考える．以下の問いに答えよ．
   (a) $\mathbf{R}$ の通常の位相 $\mathcal{U}$ に対する A の相対位相 $\mathcal{U}_A$ を求めよ．
   (b) A が不連結であることを示せ．
3. 実数 $\mathbf{R}$ の通常の位相を考える．集合 $\{1/n | n \in \mathbf{N}\}$ の開被覆で有限被覆に落とせないものを例示せよ．また，$\{1/n | n \in \mathbf{N}\} \cup \{0\}$ がコンパクトであることを証明せよ．
4. 位相空間 X 上の集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ がコンパクトであるとき，和集合 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ もコンパクトであることを証明せよ．

3 過去の試験問題

本章は、過去の期末試験問題を手許にある限り集めたものである。但し、2010 年度までは異なるシラバスの下で講義を行っていた。2012 年度以降は、現行のスタイルで講義を行っている。尚、2016 年度は試験を行わなかった。

3.1 2017 年度

1. ($15 \times 2 = 30$ 点) 数直線 $\mathbb{R}$ の通常の位相を考える．
   (a) 開区間 $(-1, 1)$ の境界点を求めよ．(理由もきちんと述べること)
   (b) 区間 $[0, 10)$ がコンパクトでないことを示せ．
2. (15 点) 空でない集合 X 上に 2 つの距離 d_1, d_2 が与えられている．$x, y \in X$ に対して $d(x, y) = \max\{d_1(x, y), d_2(x, y)\}$ と定義するとき，(X, d) は距離空間であることを証明せよ．
3. (15 点) $X = \{a, b, c, d, e\}, \mathcal{U} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d, e\}\}$ とする．このとき，$(X, \mathcal{U})$ は位相空間でないことを証明せよ．
4. (15 点) 数直線 $\mathbb{R}$ の通常の位相を考える．関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が，$x_0 \in \mathbb{R}$ で連続でないことの定義を (ε-δ 論法を用いて) 書け．
5. (15 点) 距離空間上の収束点列は，唯一つの極限を持つことを示せ．

3.2 2015 年度

1. (20 点) 区間 $[0, 1]$ 上の連続関数全体を $C[0, 1]$ と書く．$f, g \in C[0, 1]$ に対して
$$d(f, g) := \max\{|f(x) - g(x)|; x \in [0, 1]\}$$
と定義するとき，$(C[0, 1], d)$ が距離空間になることを示せ．

2. (15 点) $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$ が $\mathbb{N}$ と対等であることを示せ.

3. ($15 \times 3 = 45$ 点) 実数 $\mathbb{R}$ の通常の位相を考える．$A := \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 0.1\}$, $B := \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ とおく．以下の問いに答えよ.
   (a) $A \cup B$ の孤立点を列挙せよ.
   (b) $A \cup B$ の導集合を求めよ.
   (c) 0.11 が $A \cup B$ の外点であることを示せ.

4. (20 点) 離散位相空間の無限部分集合はコンパクトでないことを示せ.

3.3 2014 年度

1. (20 点) (X, d) を距離空間とする。$x, y \in X$ に対して、$e(x, y) := \sqrt{d(x, y)}$ と定義するとき、これも X 上の距離になることを示せ。

2. (15 点) $\sup\left\{(-1)^n \frac{n-1}{n} | n \in \mathbb{N}\right\} = 1$ を示せ。

3. (20 点) 実数 $\mathbb{R}$ の通常の位相を考える。集合 $\{1/n | n \in \mathbb{N}\}$ の開被覆で有限被覆に落とせないものを例示せよ。

4. ($15 \times 3 = 45$ 点) 実数 $\mathbb{R}$ の通常の位相を考える。
   (a) 関数 $\log x$ が $(0, 1]$ 上で連続であることを示せ。
   (b) $I \subset \mathbb{R}$ とせよ。関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が一様連続であることの定義を書き、さらにその否定命題を書け。
   (c) 関数 $\log x$ が $(0, 1]$ 上で一様連続でないことを示せ。

3.4 2013 年度

1. (20 点) d を空でない集合 X 上の距離とせよ。任意の $x, y \in X$ に対して $e(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$ と定義するとき、e も距離であることを示せ。

2. (10 点) 任意の自然数 x, y に対して $f(x, y) = x + y$ と定義するとき、f は自然数の集合 $\mathbf{N}$ 上の距離でないことを示せ。

3. 数直線 $\mathbf{R}$ の通常の位相を考える。

1. (10 点) 0.98 は開区間 $(0, 1)$ の内点であることを示せ。
2. (15 点) 部分位相空間 $(0, 1]$ において、$(0, 1/2]$ が閉集合であることを示せ。

4. (20 点) 自然対数 e を定義するデデキントの切断を与えよ。

5. (25 点) X をハウスドルフ位相空間とする。X のコンパクト部分集合 A, B に対して、$A \cap B$ もコンパクトであることを示せ。

3.5　2012 年度

講義中に紹介した命題や定理は断りなく用いても良い．

1. X と Y を集合とし，写像 $f : X \to Y$ を考える．以下の問いに答えよ．

1. X と Y を $\mathbf{R}$ として，$A \subset \mathbf{R}$ が $f^{-1}(f(A))$ の真部分集合となるような (f と A の) 例を挙げよ．(10 点)
2. f が単射であれば，任意の $A \subset X$ に対して，$A = f^{-1}(f(A))$ となることを示せ．(15 点)

2. X を空でない集合とし，$x, y \in X$ に対して

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \neq y, \\ 0, & \text{if } x = y \end{cases}$$

と定義すると，(X, d) は距離空間になる．以下の問いに答えよ．

1. X の部分集合は全て開集合となることを示せ．(10 点)
2. $p \in X$ に収束する点列はどのようなものか，説明せよ．(10 点)

3. $x, y \in \mathbf{R}^2, x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ とし，$\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ 上の関数 d_1 と d_2 を

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \\ d_2(x,y) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \end{aligned}$$

と定義する．以下の問いに答えよ．

1. $(\mathbf{R}^2, d_2)$ が距離空間であることを示せ．(15 点)
2. $(\mathbf{R}^2, d_1)$ 上の開集合は $(\mathbf{R}^2, d_2)$ 上の開集合であり，またその逆も成り立つことを示せ．(20 点)

4. 距離空間上のコンパクト集合は閉集合であることを示せ．(20 点)

3.6　2010 年度

1. 集合 $\{1, 1/2, 1/3, \dots\}$ について以下の問いに答えよ。

1. この集合が開集合でも閉集合でもないことを示せ。(20 点)
2. この集合の集積点を求めよ。(20 点)

2. (X,d) をコンパクト距離空間とし、

$$C(X) := \{ f : X \to \mathbf{R} \text{ 連続関数 } \}$$

とする。このとき、$f, g \in C(X)$ に対して、

$$\delta(f,g) := \max_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

とおく。以下の問いに答えよ。

1. 任意の $f \in C(X)$ に対して、$f(X)$ が $\mathbf{R}$ 上のコンパクト集合になることを示せ。(20 点)
2. 1. において、$f(X)$ が最大値を持つこと示せ。(10 点)
3. $(C(X), \delta)$ が距離空間であることを示せ。(20 点)
4. $C(X)$ はコンパクトではないことを示せ。(10 点)

3.7　2009 年度

1.

1. $[0,1)$ が開集合でも閉集合でもないことを証明せよ。
2. $[0,1)$ の閉包が $[0,1]$ であることを示せ。

2. 3 つの距離空間 $(X,d), (Y,d_y), (Z,d_z)$ を考える。2 つの連続関数 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ に対して、合成関数 $g \circ f$ も連続であることを証明せよ。

3. $\mathbf{R}^2$ 上の 2 点 $a = (a_x, a_y)$ と $b = (b_x, b_y)$ に対して、$d(a,b) := |a_x - b_x| + |a_y - b_y|$ と定義するとき、以下の問いに答えよ。

1. $(\mathbf{R}^2, d)$ が距離空間であることを確認せよ。
2. $\mathbf{R}^2$ 上の通常の意味での開円盤は、距離空間 $(\mathbf{R}^2, d)$ における開集合であることを証明せよ。

4. 空でない集合 X の部分集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ が距離空間 (X,d) においてコンパクトであるとき、和集合 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ もコンパクトであることを証明せよ。