2024年度

解析学IIa 講義ノート

新井 拓児 (慶應義塾大学経済学部)

2024年2月5日

2024年2月5日: 初版

この講義ノートは，2024年度春学期に開講される慶應義塾大学経済学部設置科目「解析学IIa」及び経済学研究科設置科目「経済数学III-A」のための資料であり，それ以外の目的で使用することを禁じる．また，無断で転載，複写，配布することを禁止する．
© 2024 新井拓児

まえがき

これは，慶應義塾大学経済学部設置科目「解析学 IIa」及び経済学研究科設置科目「経済数学 III-A」の講義ノートである．

本講義ではルベーグ積分論を取り扱う．ルベーグ積分論は，数理経済学を学ぶ上で重要な関数解析や凸解析を習得するために必須であるだけでなく，現代確率論の基礎でもある重要な理論である．この講義の前半では，長さ・面積・体積を抽象化した概念である測度について，その構成の仕方や諸性質について詳しく論じる．講義の後半に入ると，この測度を基にルベーグ積分の定義を与え，ルベーグ積分の様々な性質について議論する．高等学校以降これまで学んできた積分をリーマン積分と呼ぶが，このリーマン積分とルベーグ積分との違いを明確にし，ルベーグ積分を学ぶ意義についても詳しく論じる．講義の終盤では，極限と積分の交換に関する定理であるルベーグの収束定理を紹介し，さらにフビニの定理など発展的な内容についても触れる．

本講義は基本的にこの講義ノートに沿って進められる．ただし，本講義で扱う内容は抽象的かつ難解である上，他の科目に比べかなり多くのことを学習する必要がある．そのため，証明などの細部は各受講生の予習復習に委ね，講義では背景や考え方の説明に多くの時間を費やす．別途，演習問題を用意するので，試験対策などに用いて欲しい．

この講義を受講するに当たり前提知識は置かないが，微分積分学，集合論，位相空間論などで登場する基本概念，例えば sup，可算，開集合，コンパクトなど，を多用する．このような用語や概念が登場した際には時間が許す限り説明するが，足りない部分は各自で補ってもらいたい．なお，これらの用語や概念については補遺 A でも紹介している．また，経済学部の学生は証明を読んだり書いたりする訓練が足りないので，この点についても配慮をしながら講義を行うつもりである．皆さんの今後の学習や研究に少しでも資するものがあれば望外の喜びである．

参考文献

ここでは学習の手助けとなる参考文献をいくつか紹介する．下記の文献のうちのいくつかは，このノートを作成する際にも参考にさせてもらった．

[1] 服部哲弥「難問克服 ルベーグ積分」東京図書，2020.

[2] 伊藤清三「ルベーグ積分入門 」裳華房, 1963.

[3] 小谷眞一「測度と確率 」岩波書店, 2005.

[4] ツァピンスキ，コップ (二宮祥一，原啓介訳)「測度と積分　入門から確率論へ」培風館, 2008.

[5] 盛田健彦「実解析と測度論の基礎 」培風館, 2004.

[6] 佐藤坦「はじめての確率論 測度から確率へ」共立出版, 1994.

[7] 志賀浩二「ルベーグ積分 30 講」朝倉書店, 1990.

[8] テレンス・タオ (舟木直久，乙部厳己訳)「ルベーグ積分入門」朝倉書店, 2016.

[9] 谷島賢二「新版 ルベーグ積分と関数解析」朝倉書店, 2015.

[10] 吉田伸生「ルベーグ積分入門―使うための理論と演習」遊星社，2006.

目 次

第 1 週　イントロダクション 1

第 2 週　零集合 7

第 3 週　ルベーグ外測度 9

第 4 週　可測集合 14

第 5 週　測度空間 20

第 6 週　測度空間の諸性質 24

第 7 週　可測関数 28

第 8 週　ルベーグ積分の定義 1 33

第 9 週　ルベーグ積分の定義 2 37

第 10 週　ルベーグの収束定理 1 41

第 11 週　ルベーグの収束定理 2 44

第 12 週　リーマン積分とルベーグ積分の違い 49

第 13 週　直積測度空間とフビニの定理 53

第 14 週　ラドン・ニコディムの定理と条件付き期待値 57

補遺 A　補足事項 59

補遺 B　過去の試験問題 64

第 1 週　イントロダクション

本講義では，長さや面積を抽象化した概念である「測度」について学び，その測度に基づいて新しい積分概念である「ルベーグ (Lebesgue) 積分」について学ぶ[1)]．とりわけ，ルベーグの収束定理と呼ばれる「極限と積分の交換定理」を示すことを目指す．最後に，フビニ (Fubini) の定理などルベーグ積分論のやや高度な内容についても触れ，講義を締めくくる予定である．ここでは,「なぜ新たな積分概念を学ぶ必要があるのか?」,「リーマン (Riemann) 積分とルベーグ積分の違いは何なのか?」について議論したい．そのため，リーマン積分のきちんとした定義を与えることから始めたい．

1.1　リーマン積分の定義

まず，有界閉区間 $[a,b]$ 上の有界関数 f を考える．f は有界であるから，ある $M>0$ が存在して $\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|<M$ が成立する．$a=x_0<x_1<\cdots<x_k=b$ となる分点を用意して，区間 $[a,b]$ を k 個の部分区間 $[x_{i-1},x_i]$ に分ける．このとき，**分割** $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_k=b$ を与えるという．さらに，

$$|\Delta|:=\max_{1\le i\le k}|x_i-x_{i-1}|$$

と定義し[2)]，これを分割 Δ の**幅**という．分割 Δ の各部分区間 $[x_{i-1},x_i]$ から点 c_i を任意に取る．このとき，

$$S(f,\Delta,\{c_i\}):=\sum_{i=1}^{k}f(c_i)(x_i-x_{i-1})$$

と定義し，これを**リーマン和**と呼ぶ．このリーマン和を用いて，リーマン積分を以下のように定義する．

定義 1.1 実数 α が存在して,「任意の $\varepsilon>0$ に対してある $\delta>0$ が存在し，$|\Delta|<\delta$ ならば任意の $\{c_i\}$ に対して $|S(f,\Delta,\{c_i\})-\alpha|<\varepsilon$ となる」が成立しているとき，f は $[a,b]$ 上で**リーマン積分可能**であると言う．さらに α を f の $[a,b]$ 上の**定積分**といい，$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ と書く．

注意 1.2 定義 1.1 の「」で括った部分は以下のように記述することもできる: $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0;|\Delta|<\delta\Rightarrow\forall\{c_i\},|S(f,\Delta,\{c_i\})-\alpha|<\varepsilon$[3)].

[1)] この分野は測度論と呼ばれたり，ルベーグ積分論と呼ばれたり，場合によっては測度・積分論と呼ばれたりするが，中身は基本的に同じである．

[2)] ここは有限個しかないので，sup でなく max になる．

[3)] $\forall$ の後のコンマ “,” は「に対して」と読み，$\exists$ の後の “;” は「such that」と読むと理解しやすい．

定義 1.1 を言い換えれば，各部分区間から c_i をどのように選んでも，分割を細かくしたとき，より正確には $|\Delta| \to 0$ としたとき，リーマン和が極限を持つならば，その極限を $\int_a^b f(x)dx$ という記号で表現し**定積分**と呼ぶのである．

問題 1.3 区間 $[1,2]$ を定義域とする関数 $f(x) = x^2$ がリーマン積分可能であることを，定義 1.1 に沿って確認せよ．

1.2 ダルブーの定理

有界閉区間 $[a,b]$ 上の有界関数 f と，分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ の第 i 番目の部分区間 $[x_{i-1}, x_i]$ に対して，

$$M_i(f) := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad m_i(f) := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \tag{1.1}$$

とおき，

$$S_\Delta(f) := \sum_{i=1}^{k} M_i(f)(x_i - x_{i-1}), \quad s_\Delta(f) := \sum_{i=1}^{k} m_i(f)(x_i - x_{i-1})$$

と定義する．さらに，

$$S(f) := \inf_\Delta S_\Delta(f), \quad s(f) := \sup_\Delta s_\Delta(f)$$

とおき，それぞれ f の**上積分**，**下積分**と呼ぶ．このとき，以下が成立する:

定理 1.4 (ダルブー (Darboux) の定理)

$$S(f) = \lim_{|\Delta| \to 0} S_\Delta(f), \quad s(f) = \lim_{|\Delta| \to 0} s_\Delta(f).$$

証明. **準備 1:** 定理の主張は，$|\Delta_n| \to 0$ なる任意の分割列 $\{\Delta_n\}$ に対し，$S_{\Delta_n}(f) \to S(f)$ が成立することである．つまり，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $N_0 \in \mathbf{N}$ が存在し，$n \geq N_0 \Rightarrow |S_{\Delta_n}(f) - S(f)| < \varepsilon$ が成立することである．ここで，N_0 は $\varepsilon > 0$ だけでなく分割列 $\{\Delta_n\}$ の取り方にも依存する．一方，$|\Delta_n| \to 0$ を正確に記述すると，“$\forall \delta > 0, \exists N_1 \in \mathbf{N}; n \geq N_1 \Rightarrow ||\Delta_n| - 0| < \delta$”，つまり “$n \geq N_1 \Rightarrow |\Delta_n| < \delta$”である．そこで “$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; |\Delta| < \delta \Rightarrow |S_\Delta(f) - S(f)| < \varepsilon$”を示せば十分である．
準備 2: $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ なる分割に新たな分割点 $\overline{x} \in (a,b)$ を加えた分割を Δ' とする．このとき，ある $i \in \{1, \ldots, k\}$ が存在し，$x_{i-1} < \overline{x} < x_i$ をみたすとして良い．このとき，$-M < f < M$ より

$$0 \leq S_\Delta(f) - S_{\Delta'}(f) < 2M(x_i - x_{i-1}) \leq 2M|\Delta|$$

が成立する．

定理の証明: $\varepsilon > 0$ を任意にとる．$S(f)$ の定義より

$$S_{\Delta_0}(f) < S(f) + \frac{\varepsilon}{2}$$

なる分割 Δ_0 が存在する．Δ_0 の部分区間の個数を $k+1$ とする．ここで $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4kM}$ とし，$|\Delta| < \delta$ なる分割 Δ を任意に一つ取る．Δ に Δ_0 の分割点を加えた分割を Δ' とする．このとき，

$$0 \leq S_{\Delta}(f) - S_{\Delta'}(f) \leq 2kM|\Delta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成立する．一方，$S_{\Delta'}(f) \leq S_{\Delta_0}(f)$ より

$$\begin{aligned} 0 \leq S_{\Delta}(f) - S(f) &= S_{\Delta}(f) - S_{\Delta'}(f) + S_{\Delta'}(f) - S(f) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + S_{\Delta_0}(f) - S(f) < \varepsilon. \end{aligned}$$

以上より $|S_{\Delta}(f) - S(f)| < \varepsilon$ となり，定理 1.4 が成立する． □

ダルブーの定理 (定理 1.4) から以下の定理を得る．

定理 1.5 有界閉区間 $[a,b]$ 上の有界関数 f に関して，以下の 3 条件は同値である．

1. f はリーマン積分可能.
2. $S(f) = s(f)$.
3. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) < \varepsilon$ をみたす分割 Δ が存在する．

証明. **1⇒3:** 1 より，

$$\exists \alpha \in \mathbf{R}; \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; |\Delta| < \delta \Longrightarrow |S(f, \Delta, \{c_i\}) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ for any } \{c_i\}$$

となる．これより，

$$|\Delta| < \delta \Longrightarrow |S_{\Delta}(f) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ かつ } |s_{\Delta}(f) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

であり，$S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) < \varepsilon$ を得る．
3⇒2: 定理 1.4 より，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して，$|\Delta| < \delta \Rightarrow |s(f) - s_{\Delta}(f)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ が成立する．一方，3 より分割 Δ_0 が存在し，

$$|S_{\Delta_0}(f) - s_{\Delta_0}(f)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.2}$$

となる．ここで $|\Delta_1| < \delta$ をみたす分割 Δ_1 を取り，$\tilde{\Delta} := \Delta_0 \cup \Delta_1$ とすると，これは Δ_0 の細分であり，$|\tilde{\Delta}| < \delta$ をみたす．このとき，$S(f) \leq S_{\tilde{\Delta}}(f)$ と (1.2) より

$$S(f) - s(f) \leq |S_{\tilde{\Delta}}(f) - s_{\tilde{\Delta}}(f)| + |s_{\tilde{\Delta}}(f) - s(f)| < \varepsilon$$

を得る．$S(f)-s(f)\geq 0$ であるから，$\varepsilon>0$ の任意性より 2 が成立する．
2⇒1: $\alpha=S(f)=s(f)$ とおく．このとき，任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$\exists\overline{\delta}>0;|\Delta|<\overline{\delta}\Longrightarrow S_\Delta(f)-S(f)<\varepsilon,$$

$$\exists\underline{\delta}>0;|\Delta|<\underline{\delta}\Longrightarrow s(f)-s_\Delta(f)<\varepsilon$$

$\delta:=\overline{\delta}\wedge\underline{\delta}>0$ とし，$|\Delta|<\delta$ をみたす分割 Δ を取ると，

$$S(f,\Delta,\{c_i\})-\alpha<S_\Delta(f)-S(f)<\varepsilon,$$
$$S(f,\Delta,\{c_i\})-\alpha>s_\Delta(f)-s(f)>-\varepsilon$$

が成立する．よって，$|S(f,\Delta,\{c_i\})-\alpha|<\varepsilon$ を得る． □

この定理から，リーマン積分可能性を定義し直すことができる．

定義 1.6 有界閉区間 $[a,b]$ 上の有界関数 f に対して，f の上積分と下積分が一致するとき，f は $[a,b]$ 上で**リーマン積分可能**であるという．

1.3 リーマン積分可能な関数，可能でない関数

実は，$[a,b]$ 上の連続関数はいつでもリーマン積分可能である[4)]．これを示すには，一様連続性と実数の連続性が重要な役割を果たす．

定理 1.7 閉区間 $[a,b]$ の連続関数はリーマン積分可能である．

証明. $\varepsilon>0$ を任意に取る．有界閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数は，有界かつ**一様連続**である．つまり，$\delta>0$ が存在し，$x_1,x_2\in[a,b]$ が $|x_1-x_2|<\delta$ をみたすならば，$|f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$ が成立する．今，$|\Delta|<\delta$ をみたす分割 Δ を取り，Δ の各部分区間 $[x_{i-1},x_i]$ に対して，M_i 及び m_i を (1.1) で定義されたものとする．このとき，一様連続性より $M_i-m_i<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$ であり，

$$S_\Delta(f)-s_\Delta(f)=\sum_{i\geq 1}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i\geq 1}(x_i-x_{i-1})=\varepsilon$$

が成立する．従って，定理 1.5 より f はリーマン積分可能である． □

例 1.8 区間 $[0,1]$ 上の有理数全体は可算集合なので，$\{r_1,r_2,\dots\}$ と書くことができる．$[0,1]$ 上の関数 f_n と f を

$$f_n:=\begin{cases}1 & (x\in\{r_1,r_2,\dots,r_n\})\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases},\qquad f:=\begin{cases}1 & (x\text{ が有理数})\\ 0 & (x\text{ が無理数})\end{cases}$$

[4)] この結果は第 3 週 (定理 3.8) により一般的な形で再登場する．

と定義すると，各 f_n はリーマン積分可能であり，$[0,1]$ 上の各点 x で

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \to f(x)$$

が成立するが，f はリーマン積分可能でない．

問題 1.9 例 1.8 の f がリーマン積分可能でないことを示せ．

1.4 リーマン積分からルベーグ積分へ

例 1.8 でみたように，たとえリーマン積分可能な関数の列 $\{f_n\}$ が関数 f に各点収束していても，f はリーマン積分可能とは限らないのである．このように，リーマン積分可能な関数のクラスは極限操作について閉じていない．19 世紀になって極限に対する理解が深まると，極限を用いて表現される関数の解析が議論されるようになってきた．そんな折に，極限操作に関して閉じている積分概念の必要性が高まってきた．そこで生まれたのがルベーグ積分である．つまり，これから学ぶルベーグ積分は，リーマン積分の自然な拡張[5)]であり，極限操作について閉じている積分概念になっているはずである．

ルベーグ積分のきちんとした定義は第 8 週以降で与えるとして，ここでは極々簡単な考え方だけを紹介する．リーマン積分は，積分区間を分割し，「縦」に細長い短冊の面積の和である「リーマン和」の極限として定義された．一方，ルベーグ積分では，区間 $[a,b]$ 上で定義された非負有界関数 f の積分 $\int_{[a,b]} f dm$ を考える際は[6)]，$n, j \in \mathbf{N}$ に対して，集合

$$A_{n,j} := \left\{ x \in [a,b] \middle| \frac{j-1}{2^n} \le f(x) < \frac{j}{2^n} \right\}$$

を考え，

$$\int_{[a,b]} f dm := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j-1}{2^n} m(A_{n,j}) \tag{1.3}$$

と定義する．ここで，$m(A_{n,j})$ は集合 $A_{n,j}$ の「長さ」[7)]である．つまり，「横」に細長い短冊を作り，その面積の和の極限として積分を定義するのである．このとき，集合 $A_{n,j}$ の「長さ」を測定する必要が生じる．関数によっては $A_{n,j}$ は非常に複雑な集合になるかもしれず，「長さ」という概念の一般化が必要となる．例えば，例 1.8 の関数 f に対し，$\{x \in [0,1] | f(x) = 1\}$ は $[0,1]$ 上の有理数全体であるから，有理数全体の「長さ」を定義しなければならない．

---

5) つまり，リーマン積分可能な関数はルベーグ積分も可能であり，かつ両者の積分値は一致する．さらに，線形性や単調性などのリーマン積分の基本的性質をルベーグ積分もみたしている

6) この積分表示はルベーグ積分を表す記号である．ここでは，$\int_a^b f(x)dx$ と同じものと考えて差し支えない．

7) 「長さ」とカギ括弧を付けているのは，これは抽象化された概念としての「長さ」であって，われわれが日常的に用いている長さと区別するためである．

この「長さ」を一般化した概念が測度である．従って，ルベーグ積分の定義を与える前に測度について学ぶ必要がある[8)]．ここでもう一つ重大な問題がある．それは,「長さ」を定義できない $\mathbf{R}$ の部分集合が存在するということである．測度とは「長さ」の一般化であるから，例えば，区間 $[a,b]$ の測度 $m([a,b])$ が $b-a$ と等しくなるよう m を構成しなければならない．また，2 つの集合 A_1 と A_2 が共通部分を持たないのであれば，$m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2)$ が成り立つのが自然である．さらに，極限操作について閉じた概念を作りたいので，この加法性を強めて，共通部分を持たない集合列 $\{A_n\}$ に対して[9)]，$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$ が成立することが望ましい．このような性質を σ-加法性と呼ぶ．以上のような性質を要求すると，測度 m の定義域として $\mathbf{R}$ の部分集合全体を取ることはできない．尚，m の定義域に含まれる集合，言い換えれば,「長さ」を測ることができる集合を「可測集合」と呼ぶ．ここで積分の定義 (1.3) に戻れば，集合 $A_{n,j}$ が可測集合でなければ積分が定義できないことが分かる．集合 $A_{n,j}$ が可測になるような関数を「可測関数」と呼ぶ．従って，ルベーグ積分が極限操作について閉じているためには，可測関数列の極限は再び可測関数になっていなければならない．実際，可測関数はこのような性質をみたすのである[10)]．

さらに，$\mathbf{R}$ の部分集合のみならず，一般の集合上に「可測」の概念を昇華させることができる．つまり，一般の集合に対して「測度」を定義することができるのである．これを用いると，一般の集合上に定義された可測関数に対するルベーグ積分が定義できる．この抽象化は 20 世紀の数学の発展に大きく寄与した．その代表例として確率論があげられる．将来起こり得るすべての事象の集まりである標本空間を Ω とし，Ω 上の測度 $\mathbb{P}$ で $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ と標準化されたものを確率測度と呼び，確率論はこの確率測度に関する解析学として発展してきたのである．確率論で登場する「確率変数」は可測関数のことであり,「期待値」は確率測度に関するルベーグ積分で与えられる．従って，確率論を理解するためにはルベーグ積分論を習得する必要がある．

[8)] 雑に言って，測度とは $\mathbf{R}$ の部分集合の「長さ」を与える関数である．つまり，$A \subset \mathbf{R}$ に対して，$m(A)$ は集合 A の「長さ」を表している．

[9)] 集合列 $\{A_n\}$ が共通部分を持たないとは，$n \neq m$ ならば $A_n \cap A_m = \emptyset$ が成り立つことを意味している．このような性質を「**互いに素**」と呼ぶ．

[10)] この事実は第 7 週で論じる．

第2週　零集合

この章から 4 章程度に渡り，$\mathbf{R}$ の部分集合の「長さ」について議論する．「長さ」の定義を与え,「長さ」を測定できる集合がどのような性質を持つのか，さらには「長さ」を測定できる集合の全体がどのような構造を持つのかについて議論する．

まず,「長さ」の定義を考えるに際し，有界閉区間 $I = [a, b]$ の長さ $l(I)$ は，$l(I) = b - a$ と定義するのが自然であろう．同様に，$l([a, b)) = l((a, b]) = l((a, b)) = b - a$ と定義するのが自然である．すると，一点集合 $\{a\}$ の「長さ」は，$\{a\} = [a, a]$ と考え，$l(\{a\}) = a - a = 0$ である．これもまた自然であろう．さらにこの概念を拡張すると，有限集合の「長さ」はやはり 0 とするべきである．そこで,「長さ」0 の集合を定義することから始める．

定義 2.1 $A \subset \mathbf{R}$ が**零集合**であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，有界閉区間の列 $\{I_n\}$ が存在して $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) < \varepsilon$ をみたすときに言う．尚，上記の定義において，閉区間を開区間 (a, b) または半開区間 $(a, b]$，$[a, b)$ に置き換えても同じ定義を与える．

問題 2.2 $A \subset \mathbf{R}$ が零集合であるとき，$B \subset A$ も零集合になることを証明せよ．

命題 2.3　1. 空集合 $\emptyset$ は零集合である．

2. 一点集合 $\{a\}$ は零集合である．

3. $[0, 1]$ 上の有理数の全体は零集合である．

証明.　1. $\varepsilon > 0$ を任意に取る．各 $n \in \mathbf{N}$ に対して，$I_n := \left[-\frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right]$ とおくと，$l(I_n) = \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ である．よって，$\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ であり，$\emptyset \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ であるから，$\emptyset$ は零集合である．

2. 1. と同様にして示せる．$\varepsilon > 0$ を任意に取る．各 $n \in \mathbf{N}$ に対して，$I_n := \left[a - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, a + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right]$ とおくと，$l(I_n) = \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ となる．よって，$\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ であり，$\{a\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ が成立する．従って，$\{a\}$ は零集合である．

3. $[0, 1]$ 上の有理数の全体は可算集合なので，$\{r_1, r_2, \dots\}$ と書ける．$\varepsilon > 0$ を任意に取り，各 $n \in \mathbf{N}$ に対して $I_n := \left[r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right]$ とおく．このとき，$l(I_n) = \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ であり，$\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ である．また，$\{r_1, r_2, \dots\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ が成立するので，$\{r_1, r_2, \dots\}$ は零集合である．　□

定理 2.4 $\{N_n\}$ を零集合の列とする．このとき，$\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ も零集合である．

証明. $\varepsilon > 0$ を任意に取る．各 N_n に対して，有界閉区間列 $\{I_{n,k}\}_{k\geq 1}$ が存在し，

$$N_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{n,k} \text{ かつ } \sum_{k=1}^{\infty} l(I_{n,k}) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

をみたす．$\{I_{n,k}\}_{n\geq 1,k\geq 1}$ を $I_{1,1}, I_{1,2}, I_{2,1}, I_{3,1}, I_{2,2}, I_{1,3}, I_{1,4}, \ldots$ と一列に並べ，順番に $J_1, J_2, \ldots$ と番号を振る．このとき，$\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$ であり，

$$\sum_{k=1}^{\infty} l(J_k) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} l(I_{n,k}) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

が成立する．よって，$\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ は零集合である． □

例 2.5 (カントール集合) 非可算零集合の例として**カントール (Cantor) 集合**を紹介する．閉区間 $[0,1]$ を 3 等分し，その真ん中の開区間 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ をくり抜いてできた集合を C_1 とする．つまり，$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ である．次に，C_1 を構成している 2 つの閉区間 $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ をそれぞれ 3 等分し，真ん中の開区間をくり抜くと，集合 $\left[0, \frac{1}{3^2}\right] \cup \left[\frac{2}{3^2}, \frac{3}{3^2}\right] \cup \left[\frac{6}{3^2}, \frac{7}{3^2}\right] \cup \left[\frac{8}{3^2}, 1\right]$ が得られる．これを C_2 とする．以下これを繰り返し，くり抜きを n 回行った後に残った集合を C_n と書く．集合列 $\{C_n\}$ は減少列であるから，極限 $C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ が存在する．この C をカントール集合と呼ぶ．このとき，C は零集合である．何故ならば，C_n は長さが 3^{-n} である 2^n 個の互いに素な閉区間から成るので，C_n の長さは $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ となるからである．

さらに C は非可算集合であることを示そう．まず，$[0,1]$ 上の各実数を 3 進展開すると 0,1,2 を用いて表現される．そして，上記で述べた n 回目のくり抜きによって，小数点以下 $n-1$ 桁までは 0 または 2 で n 桁目が 1 である数が除外される．従って，カントール集合 C は，3 進展開すると $0.020020\ldots$ のように 1 が現れない $[0,1]$ に含まれる数の全体である．今，$x \in C$ に対してその 3 進展開で現れた 2 を 1 に変換する．例えば，$0.020020\ldots$ は $0.010010\ldots$ に変換される．この 0 と 1 からなる新たな展開を 2 進展開に持つ実数を $y \in [0,1]$ とすると，写像 $x \mapsto y$ は C と $[0,1]$ の間の 1 対 1 対応になっている．従って，C は非可算である．

第 3 週　ルベーグ外測度

区間[11]を用いて，一般の集合に対して「長さ」の概念を与えたい．そこで以下のようにルベーグ外測度を定義し，その性質について議論する．

定義 3.1 ルベーグ外測度とは，以下のように定義される $\mathbf{R}$ の部分集合全体を定義域とする関数 m^* のことである:

$$m^*(A) := \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n)\middle| I_n\text{は有界閉区間で } A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\}, \quad A \subset \mathbf{R}.$$

注意 3.2　1. $\{a\} = [a, a]$ と考え，一点集合 $\{a\}$ も閉区間とみなす.

2. このルベーグ外測度の定義はそのまま n 次元へ拡張できる.

3. m^* は $[0, \infty]$-値関数である．今後，$0 \times \infty = 0$ と約束しておく[12].

定理 3.3　1. $A \subset \mathbf{R}$ に対して，$m^*(A) = 0$ であることと，A が零集合であることは同値である.

2. **(単調性)** $A \subset B$ ならば $m^*(A) \leq m^*(B)$ である.

3. I が区間であるとき，$m^*(I) = l(I)$ が成立する.

4. **(σ-劣加法性)** 任意の集合列 $\{A_n\}$ に対して，以下が成立する:

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n).$$

5. **(平行移動不変性)** $A \subset \mathbf{R}$，$t \in \mathbf{R}$ に対して，$A + t := \{a + t | a \in A\}$ とおくとき，$m^*(A) = m^*(A + t)$ が成り立つ.

証明.　1. $A \subset \mathbf{R}$ が $m^*(A) = 0$ をみたすとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，有界閉区間列 $\{I_n\}$ が存在し，$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) < \varepsilon$ となる．よって，$A \subset \mathbf{R}$ は零集合.

一方，$A \subset \mathbf{R}$ が零集合ならば，$\varepsilon > 0$ を任意に固定すると，有界閉区間列 $\{I_n\}$ が存在し，$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) < \varepsilon$ となる．よって，$m^*(A) < \varepsilon$ が成立する．$\varepsilon > 0$ の任意性より $m^*(A) = 0$ が成り立つ.

2. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，閉区間列 $\{I_n\}$ が存在し，$B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) < m^*(B) + \varepsilon$ となる．このとき，$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ でもあるから，m^* の定義より

[11] これ以降，単に「区間」と言った場合は，有界の閉区間，開区間，半開区間を指す.
[12] 同様の議論は第 7 週でも行う.

$m^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n)$ が成立する．以上より $m^*(A) \leq m^*(B)+\varepsilon$ が任意の $\varepsilon > 0$ に対して成立する．よって，$m^*(A) \leq m^*(B)$ が成り立つ．

3. $I = [a,b]$ の場合のみ示す．$I_1 = I$, $I_n = [0,0]$, $n \geq 2$ とすれば，$I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ が成立する．ここで $[0,0]$ も閉区間と見なすことに注意．よって，$m^*(I) \leq \bigcup_{n=1}^{\infty} l(I_n) = l(I)$.

逆向きの不等式を示そう．$\varepsilon > 0$ を任意にとる．このとき，閉区間列 $\{I_n = [a_n, b_n]\}$ で $I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) < m^*(I) + \frac{\varepsilon}{2}$ をみたすものが存在する．ここで，$J_n = \left(a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, b_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right)$ とすると，

$$\sum_{n=1}^{\infty} l(J_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ l(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) + \frac{\varepsilon}{2}$$

が成立する．よって，$\sum_{n=1}^{\infty} l(J_n) < m^*(I) + \varepsilon$ を得る．一方，$I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ に注意すると，ハイネ・ボレル (Haine-Borel) の定理より $\{J_n\}$ の中から有限個の要素 $J_{n_1}, J_{n_2}, \ldots, J_{n_K}$ を選んで，$I \subset \bigcup_{k=1}^{K} J_{n_k}$ とすることができる．$J_{n_k} = (\tilde{a}_k, \tilde{b}_k)$ とし，$\underline{a} := \min\{\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_K\}$, $\overline{b} := \max\{\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_K\}$ とおくと，

$$l(I) < \overline{b} - \underline{a} \leq \sum_{k=1}^{K} l(J_{n_k}) < m^*(I) + \varepsilon$$

が成立する．$\varepsilon > 0$ の任意性より $l(I) \leq m^*(I)$ を得る．

4. 任意に固定した $\varepsilon > 0$ と任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して，閉区間列 $\{I_{n,k}\}_{k \geq 1}$ が存在し，$A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{n,k}$ かつ $\sum_{k=1}^{\infty} l(I_{n,k}) < m^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$ をみたす．定理 2.4 の証明と同様に，閉区間列 $\{I_{n,k}\}_{n \geq 1, k \geq 1}$ を一列に並べ $J_1, J_2, \ldots$ と番号を振ると，$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{n,k} \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} J_m$ であり，

$$\sum_{m=1}^{\infty} l(J_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} l(I_{n,k}) < \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + \varepsilon$$

が成り立つ．$\varepsilon > 0$ の任意性より，

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{m=1}^{\infty} l(J_m) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$$

が成立する．

5. 省略 □

問題 3.4 $m^*(A)=0$ ならば，任意の $B\subset\mathbf{R}$ に対して，$m^*(A\cup B)=m^*(B)$ となることを証明せよ．

注意 3.5 (カラテオドリ外測度) 定義 3.1 を抽象化し，一般の集合 X に対する外測度を考えることもできる．X の部分集合全体を定義域とする $[0,\infty]$-値関数 m^* が，$m^*(\emptyset)=0$ であり，単調性と σ-劣加法性を持つとき，**カラテオドリ (Caratheodory) 外測度**と言う．例えば，X を無限集合とし，$A\subset X$ に対して

$$m^*(A)=\begin{cases} A\text{ に含まれる元の個数} & (A\text{ が有限集合のとき})\\ \infty & (A\text{ が無限集合のとき})\end{cases}$$

と定めると，m^* はカラテオドリ外測度になる．

問題 3.6 $\mathbf{N}=\{1,2,3,\dots\}$ の有限部分集合 A に対して，その元の個数を $|A|$ と書く．$A\subset\mathbf{N}$ に対して，

$$m^*(A)=\begin{cases} |A| & (|A|\text{ が偶数のとき})\\ |A|+1 & (|A|\text{ が奇数のとき})\\ \infty & (A\text{ が無限集合のとき})\end{cases}$$

とおくとき，m^* がカラテオドリ外測度になることを確かめよ．

例 3.7 f を $\mathbf{R}$ 上に定義された右連続単調増加関数とする．半開区間 $I=(a,b]$ に対して，$f(I):=f(b)-f(a)$ とおく．$A\subset\mathbf{R}$ に対して，

$$m^*(A):=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}f(I_n)\ :\ I_n\text{は半開区間で }A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right\}$$

と定義する．この m^* は $\mathbf{R}$ 上のカラテオドリ外測度であり，特に**ルベーグ・スティルチェス (Lebesgue-Stieltjes) 外測度**と呼ばれる．尚，$f(x)=x$ のとき，m^* は外測度と一致する．

最後に以下の定理を紹介する．

定理 3.8 有界閉区間 $[a,b]$ 上に定義された有界関数 f がリーマン積分可能であるための必要十分条件は，零集合を除いた $[a,b]$ 上の点で f が連続となることである．

付録:　定理 3.8 の証明

まずは準備から始める．関数 f が x を含む開区間上で定義されているとき，

$$\omega(f,x):=\lim_{\delta\to0}\left(\sup_{|x-y|<\delta}f(y)-\inf_{|x-y|<\delta}f(y)\right)$$

を f の**点 x における振動量**という．尚，δ を 0 に近づけると括弧内の値は減少するので，極限は常に存在する．ここで 2 つの補題を紹介する．証明は微分積分学の演習問題としてとっておく．

補題 3.9 f が x で連続であるためには，$\omega(f,x)=0$ であることが必要十分条件である．

補題 3.10 I を開区間とする．任意の $x\in I$ に対して，以下が成り立つ:

$$\omega(f,x)\leq \sup_{y\in I} f(y)-\inf_{y\in I} f(y).$$

必要性:　f がリーマン積分可能であると仮定し，f の不連続点の全体 D が零集合であることを示す．尚，細かいことであるが，D が零集合であるかどうかを調べることが目的なので，f の定義域の端点 a と b は D から除外しても差し支えない．まず，$n\in\mathbf{N}$ に対して，

$$A_n:=\left\{x\in(a,b)\middle|\omega(f,x)>\frac{1}{n}\right\}$$

とすれば，補題 3.9 より $D=\{x\in(a,b)|\omega(f,x)>0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ となる．従って定理 2.4 より，任意の $n\in\mathbf{N}$ に対して A_n が零集合であることを示せば十分である．ここで，$n\in\mathbf{N}$ と $\varepsilon>0$ を任意に取る．f はリーマン積分可能なので，定理 1.5 より，$[a,b]$ 上の分割 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_k=b$ が存在し，$S_\Delta(f)-s_\Delta(f)<\varepsilon$ をみたす．よって，分割 Δ の各部分区間に対して M_i 及び m_i を (1.1) のように定義すると，

$$S_\Delta(f)-s_\Delta(f)=\sum_{i=1}^{k}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})<\varepsilon \tag{3.1}$$

が成立する．

次に，各部分区間から端点を取り除いてできた開区間 (x_{i-1},x_i) の中で，A_n と共通部分を持つものを順番に $I_{p_1},\dots,I_{p_j}$ とする．このとき，

$$A_n\subset I_{p_1}\cup\cdots\cup I_{p_j}\cup\{x_1,\dots,x_{k-1}\}$$

である．ここで $\{x_1,\dots,x_{k-1}\}$ を長さの総和が ε 以下になる開区間 $J_1,\dots,J_{k-1}$ で覆うと，

$$A_n\subset\bigcup_{r=1}^{j}I_{p_r}\cup\bigcup_{m=1}^{k-1}J_m \tag{3.2}$$

となる．各 $r=1,\dots,j$ に対して，$M_{p_r}:=\sup_{x\in I_{p_r}}f(x)$, $m_{p_r}:=\inf_{x\in I_{p_r}}f(x)$ とおくと，$A_n\cap I_{p_r}\neq\emptyset$ であることと補題 3.10 より $\dfrac{1}{n}<M_{p_r}-m_{p_r}$ が成立す

る．ここで，(3.1) の和を $p_1, \ldots, p_j$ についてのみ取れば，$\dfrac{1}{n}\sum_{r=1}^{j} l(I_{p_r}) < \varepsilon$ を得る．ゆえに，(3.2) の右辺の区間の長さの総和は $n\varepsilon + \varepsilon$ 以下である．つまり，$m^*(A_n) < n\varepsilon + \varepsilon$ となる．ε は任意なので A_n は零集合である．

十分性:　f の不連続点の集合 D は零集合であると仮定し，f がリーマン積分可能であることを示す．尚，ここでは不連続点として端点 a, b も含めて考える．$\varepsilon > 0$ を任意に取ると，開区間の列 $\{I_n\}$ が存在し，

$$D \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \text{ かつ } \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) < \varepsilon \tag{3.3}$$

をみたす．D の外の点 x において f は連続なので，x を含む開区間 J_x が存在し，$y \in J_x \cap [a,b]$ ならば $|f(y) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ をみたす．このとき，以下が成立する:

$$\sup_{y \in J_x \cap [a,b]} f(y) - \inf_{y \in J_x \cap [a,b]} f(y) < \varepsilon. \tag{3.4}$$

今，

$$[a,b] \subset \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right) \cup \left(\bigcup_{x \in [a,b] \setminus D} J_x \right)$$

が成立している．ここで，$[a,b]$ はコンパクトであるから、ハイネ・ボレルの定理より $\{I_n\}$ と $\{J_x\}$ の中からそれぞれ有限個を選び $[a,b]$ を覆うことができる．このように選ばれたものを $I_1, \ldots, I_N$ 及び $J_1, \ldots, J_L$ とし，これら $N+L$ 個の開区間の全ての端点を用いて作る $[a,b]$ の分割を $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ とする．k 個ある部分区間 (両端点を除いて開区間にしたもの) のうち，$I_1, \ldots, I_N$ のどれかに含まれるもの全体を K_1 とし，それ以外を K_2 とする．ただし，K_2 に属す部分区間は必ず $J_1, \ldots, J_L$ のどれかに含まれる．このとき，(3.1) の右辺の和を K_1 に関する和と K_2 に関する和に分解する:

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sum_{K_1} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{K_2} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}).$$

ここで，f は有界関数だから $M := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| < \infty$ であり，Δ の各部分区間において $M_i - m_i < 2M$ が成り立つ．(3.3) より I_n の長さの総和は ε 以下であるから，$\sum_{K_1} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq 2M\varepsilon$ である．一方，(3.4) より $\sum_{K_2} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq (b-a)\varepsilon$ となる．以上より，

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) \leq (2M + b - a)\varepsilon$$

が成り立つ．ε は任意なので，定理 1.5 より f はリーマン積分可能である．

第 4 週　可測集合

ルベーグ外測度 $m^*(A)$ が $A \subset \mathbf{R}$ の「長さ」を与えるものと考えれば，定理 3.3 は「m^* が当然持つべき性質」の代表的なものを列挙したものと見なすことができる．さらに，σ-劣加法性を強めて，集合列 $\{A_n\}$ が互いに素，つまり $n \neq m$ のとき $A_n \cap A_m = \emptyset$ であるならば

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) \tag{4.1}$$

が成立することも,「長さ」が持つ自然な性質であろう．ところが，一般に **σ-加法性**と呼ばれるこの性質は常に成り立つとは限らないのである．そこで，σ-加法性が成立するようにルベーグ外測度の定義域を制限する．この制限された定義域に属する集合を可測集合と呼ぶが，可測集合には 2 種類の定義がある．

4.1　ルベーグ可測集合

集合 $A \subset \mathbf{R}$ を有界とする．このとき，A を含む区間 I に対して,

$$m_*(A) := l(I) - m^*(I \backslash A)$$

として定める m_* を**ルベーグ内測度**と呼ぶ．尚，$m_*(A)$ の値は I の取り方によらない．$m_*(A)$ とは，ラフに言えば A に含まれる区間の和集合に対する測度の最大値である．

問題 4.1 以下を証明せよ．

1. 任意の有界集合 $A \subset \mathbf{R}$ に対して $0 \leq m_*(A) < \infty$.
2. 任意の有界集合 $A \subset \mathbf{R}$ に対して $m_*(A) \leq m^*(A)$.
3. $A \subset B$ ならば $m_*(A) \leq m_*(B)$.
4. I が区間であるとき，$m_*(I) = l(I)$.

有界集合 $A \subset \mathbf{R}$ が**ルベーグ可測**であるとは,

$$m_*(A) = m^*(A)$$

をたすときに言う．ルベーグ可測集合とは，言わば,「長さ」を測定できる集合である．A がルベーグ可測であるとは，区間の和集合で A を含むものと，A に含まれる区間の和集合の差を考えるとき，零集合にいくらでも近いものが取れるときに言う．尚，A が有界でないときは，全ての自然数 n に対して $A \cap [-n, n]$ がルベーグ可測であるとき，A はルベーグ可測であるという．

4.2　カラテオドリによる可測性

ここではもう一つの可測性の概念である**カラテオドリによる可測性**を紹介する．後に示すように，$\mathbf{R}$ の部分集合がカラテオドリ可測であることとルベーグ可測であることは同値である．また，前節のルベーグによる可測性をより一般の空間に拡張しようとしても，その定義からせいぜい $\mathbf{R}^n$ までしか拡張できないが，カラテオドリの可測性は，注意 3.5 で紹介したカラテオドリ外測度を用いれば一般の集合に拡張することが可能である[13)]．

定義 4.2 集合 $A \subset \mathbf{R}$ が**カラテオドリ可測**であるとは，任意の集合 $E \subset \mathbf{R}$ に対して

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) \tag{4.2}$$

が成立するときに言う．

注意 4.3 $E = (E \cap A) \cup (E \cap A^c)$ に注意すると，m^* の劣加法性より，$m^*(E) \leq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$ を得る．従って，集合 A がカラテオドリ可測であることの定義を

$$m^*(E) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$$

に書き換えることができる．

以後，カラテオドリ可測を単に**可測**と呼ぶ．ここでは可測集合の性質を紹介する．ただし，$\mathcal{M}$ を可測集合の全体とする．

定理 4.4　1. 任意の零集合は可測である．

2. 任意の区間は可測である．

証明.　1. $N \subset \mathbf{R}$ を零集合とする．定理 3.3 の 1 及び 2 より，任意の $E \subset \mathbf{R}$ に対して，$m^*(E \cap N) \leq m^*(N) = 0$ となる．一方，$m^*(E \cap N^c) \leq m^*(E)$ であるから，$m^*(E) \geq m^*(E \cap N) + m^*(E \cap N^c)$ を得る．
2. 有界閉区間 I の可測性を示せば十分である．$m^*(E) < \infty$ となる任意の $E \subset \mathbf{R}$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して，閉区間列 $\{I_n\}$ が存在し，$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) < m^*(E) + \varepsilon$ となる．ここで，$I_n \cap I$ は $\emptyset$ か有界閉区間か一点集合になる．ただし，一点集合 $\{a\}$ を $[a, a]$ として有界閉区間と見なす．従って，$\{I_n \cap I\}$ は閉区間列であり，$E \cap I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n \cap I)$ をみたす．同様にして，$I_n \cap I^c$ はせいぜい 2 つの (閉とは限らない) 区間から成る集合なので，適宜，端点を加えればせいぜい 2 つの閉区間から成る集合に拡張できる．また，

[13)] この点に関する詳細は第 5 週の付録を参照せよ．

この拡張は長さを変えないことから，$I_n \cap I^c$ を一つの閉区間のように扱っても差し支えない．これにより，$E \cap I^c \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n \cap I^c)$ をみたす．明らかに $l(I_n) = l(I_n \cap I) + l(I_n \cap I^c)$ が成り立つので，

$$\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n \cap I) + \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n \cap I^c) \geq m^*(E \cap I) + m^*(E \cap I^c)$$

が成立する．$\varepsilon > 0$ の任意性より，$m^*(E) \geq m^*(E \cap I) + m^*(E \cap I^c)$ を得る．よって，I は可測である． □

定理 4.5 1. $\mathbf{R} \in \mathcal{M}$.

2. $A \in \mathcal{M}$ ならば $A^c \in \mathcal{M}$.

3. $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{M}$ ならば $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

注意 4.6 一般に，集合 X に対して，その部分集合族 $\mathcal{A}$ が定理 4.5 の 3 つの条件[14]をみたすとき，X 上の **σ-加法族**[15]という．また，X とその上の σ-加法族 $\mathcal{A}$ を組みにしたもの $(X, \mathcal{A})$ を**可測空間**と言う．

問題 4.7 $\{\emptyset, X\}$ 及び X のベキ集合は X 上の σ-加法族であることを示せ．

問題 4.8 $\mathcal{A}$ を集合 X 上の σ-加法族とする．以下を示せ．

1. $A, B \in \mathcal{A}$ ならば，$A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$ は $\mathcal{A}$ に含まれる．

2. $Y \subset X$ に対して，$\{A \cap Y | A \in \mathcal{A}\}$ は Y 上の σ-加法族である．

3. σ-加法族の族 $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ に対し，$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{A}_\alpha$ もまた σ-加法族である[16]．

問題 4.9 A を集合 X の真部分集合で空でないものとする．このとき，$\{\emptyset, A, X\}$ は X 上の σ-加法族でないことを確認せよ．また，A を含む X 上の σ-加法族で最小となるものを求めよ．

問題 4.10 全ての有界閉区間 $[a, b]$ を含む $\mathbf{R}$ 上の σ-加法族で最小となるものが存在することを示せ．

問題 4.11 集合 X 上の 2 つの σ-加法族 $\mathcal{A}_1$ と $\mathcal{A}_2$ に対し，

$$\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 := \{A \subset X | A \in \mathcal{A}_1 \text{ かつ } A \in \mathcal{A}_2\}$$

と定義するとき，$\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ が再び X 上の σ-加法族になることを証明せよ．

[14] この場合，条件 1 は $X \in \mathcal{A}$ となる．
[15] 本によっては **σ-集合体**，**σ-集合代数**，**完全加法族**などと言う．
[16] Λ はインデックス集合である．この場合，Λ は非可算集合であっても良い．

定理 4.5 の証明. $\mathbf{R}^c = \emptyset$ であることより 1 は成立する．また，$(A^c)^c = A$ より 2 も成立する．3 を示そう．

Step 1: $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$ ならば $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{M}$ であることを示す．$A_1 \in \mathcal{M}$ より，任意の $E \subset \mathbf{R}$ に対して，$m^*(E) = m^*(E \cap A_1) + m^*(E \cap A_1^c)$ が成立する．また，E として $E \cap A_1^c$ を取ることにより，A_2 の可測性から

$$m^*(E \cap A_1^c) = m^*(E \cap A_1^c \cap A_2) + m^*(E \cap A_1^c \cap A_2^c)$$

が成り立つ．よって，

$$m^*(E) = m^*(E \cap A_1) + m^*(E \cap A_1^c \cap A_2) + m^*(E \cap (A_1 \cup A_2)^c) \quad (4.3)$$

を得る．一方，$A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_1^c \cap A_2)$ であることと定理 3.3 の 4 より

$$m^*(E \cap A_1) + m^*(E \cap A_1^c \cap A_2) \geq m^*(E \cap (A_1 \cup A_2))$$

が成立する．以上より，

$$m^*(E) \geq m^*(E \cap (A_1 \cup A_2)) + m^*(E \cap (A_1 \cup A_2)^c)$$

を得る．よって，$A_1 \cup A_2$ は可測である．

Step 2: 次に，$A_1, A_2 \in \mathcal{M}$ ならば $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{M}$ であることを示す．2 より $A_1^c, A_2^c \in \mathcal{M}$ であり，Step 1 より $A_1^c \cup A_2^c \in \mathcal{M}$ である．つまり，$(A_1 \cap A_2)^c \in \mathcal{M}$ である．従って，再び 2 より $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{M}$ が成り立つ．

Step 3: 互いに素な集合列 $\{A_n\} \subset \mathcal{M}$ に対し，$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$ であることを示す．(4.3) より，$A_1 \cap A_2 = \emptyset$ に注意すると，

$$m^*(E) = m^*(E \cap A_1) + m^*(E \cap A_2) + m^*(E \cap (A_1 \cup A_2)^c)$$

が成立する．今，

$$m^*(E) = \sum_{k=1}^{n-1} m^*(E \cap A_k) + m^*\left(E \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)^c\right)$$

を仮定する．$A_n \in \mathcal{M}$ なので

$$\begin{aligned} m^*\left(E \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)^c\right) &= m^*\left(E \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)^c \cap A_n\right) + m^*\left(E \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)^c \cap A_n^c\right) \\ &= m^*(E \cap A_n) + m^*\left(E \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)^c\right) \end{aligned}$$

が成立する．従って，帰納法より

$$m^*(E) = \sum_{k=1}^{n} m^*(E \cap A_k) + m^*\left(E \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)^c\right)$$

が任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して成立する．ここで，$\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)^c \supset \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)^c$ に注意すると，

$$m^*(E) \geq \sum_{k=1}^{n} m^*(E \cap A_k) + m^*\left(E \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)^c\right)$$

となり，$n \to \infty$ とすれば，

$$m^*(E) \geq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E \cap A_k) + m^*\left(E \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)^c\right) \tag{4.4}$$

を得る．さらに，m^* の σ-劣加法性 (定理 3.3 の 4) より，

$$m^*(E) \geq m^*\left(E \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)\right) + m^*\left(E \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)^c\right)$$

が成り立つ．以上より $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$ が得られた．

Step 4: 最後に $\{A_n\} \subset \mathcal{M}$ ならば $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$ を示す．$B_1 = A_1, B_2 = A_2 \backslash A_1, \ldots, B_n = A_n \backslash (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) = A_n \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1})^c, \ldots$ とおく．Step 1 と Step 2 をくり返し用いると，各 $n \in \mathbf{N}$ に対して，$B_n \in \mathcal{M}$ を得る．$\{B_n\}$ は互いに素であるから，Step 3 より $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{M}$ を得る．$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ であるから，$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$ が成立する． □

定理 4.12 m^* は $\mathcal{M}$ 上 σ-加法性を持つ．つまり，互いに素な集合列 $\{A_n\} \subset \mathcal{M}$ に対して，以下が成立する:

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n).$$

証明. (4.4) 及び m^* の σ-劣加法性より，任意の $E \subset \mathbf{R}$ に対して，

$$\begin{aligned} m^*(E) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E \cap A_k) + m^*\left(E \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)^c\right) \\ &\geq m^*\left(E \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)\right) + m^*\left(E \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)^c\right) = m^*(E) \end{aligned}$$

が成立する．つまり，

$$m^*(E) = \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E \cap A_k) + m^*\left(E \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)^c\right)$$

であり，$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ と取れば

$$m^* \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k)$$

が成り立つ．□

第 5 週　測度空間

5.1　ルベーグ測度空間

定理 5.1 $\mathbf{R}$ の部分集合がルベーグ可測であることと (カラテオドリ) 可測であることは同値である.

証明.　$\mathbf{R}$ の有界部分集合についてのみ示せば十分である. (カラテオドリ) 可測集合 $A \subset \mathbf{R}$ を含む区間 I に対して (4.2) が成立する. 従って, $l(I) = m^*(I) = m^*(I \cap A) + m^*(I \cap A^c) = m^*(A) + m^*(I \backslash A)$ が成立する. よって, $m^*(A) = l(I) - m^*(I \backslash A) = m_*(A)$, つまり A はルベーグ可測である.

次に, 有界集合 $A \subset \mathbf{R}$ をルベーグ可測集合とする. 任意の $k \geq 1$ に対して, 閉区間列 $\{I_{n,k} = [a_{n,k}, b_{n,k}]\}_{n \geq 1}$ が存在し, $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{n,k}$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_{n,k}) < m^*(A) + \dfrac{1}{2k}$ となる. $I_{n,k}$ を少し拡げて, 開区間

$$J_{n,k} = \left(a_{n,k} - \frac{1}{2^{n+2}k}, b_{n,k} + \frac{1}{2^{n+2}k} \right)$$

を定義すると, $\sum_{n=1}^{\infty} l(J_{n,k}) < m^*(A) + \dfrac{1}{k}$ をみたす. ここで $G := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} J_{n,k}$ の性質を調べよう. まず, G は可算個の開集合の共通部分であることに注意したい. また, $\bigcup_{n=1}^{\infty} J_{n,k} \supset A$ なので $G \supset A$ である. さらに, $m^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} J_{n,k} \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} l(J_{n,k}) < m^*(A) + \dfrac{1}{k}$ であるから, 任意の $k \in \mathbf{N}$ に対して, $m^*(G) < m^*(A) + \dfrac{1}{k}$ が成り立つ. よって, $m^*(G) \leq m^*(A)$ となる. 一方, $G \supset A$ より $m^*(G) = m^*(A)$ を得る. 最後に, 定理 4.5(及び問題 4.8) より G は可測, つまり $G \in \mathcal{M}$ である. このような集合 G を A の**等測包**と呼ぼう[17].

今, A を含む区間 I を取り, $I \backslash A$ の等測包を $\tilde{G}$ とする. さらに, $K := I \cap \tilde{G}^c$ とおく. このとき, 定理 4.4, 定理 4.5 及び問題 4.8 より K は可測であり, $K \subset A$ となるので, $m^*(K) \leq m^*(A)$ を得る. さらに, I は K も含んでおり, K はこの定理の証明の前半よりルベーグ可測であるから,

$$\begin{aligned} m^*(K) = m_*(K) &= l(I) - m^*(I \backslash K) = l(I) - m^*(I \cap \tilde{G}) \\ &\geq l(I) - m^*(\tilde{G}) = l(I) - m^*(I \backslash A) = m_*(A) = m^*(A) \end{aligned}$$

となる. 以上より $m^*(K) = m^*(A) = m^*(G)$ であり, $G \backslash K$ は零集合, よって, 定理 4.4 より可測である. さらに, $A \backslash K \subset G \backslash K$ であるから, $A \backslash K$ も零集合で可測となる. 最後に, A は 2 つの可測集合 K と $A \backslash K$ の和集合であるから, 定理 4.5 より可測である. □

[17] $G \subset \mathbf{R}$ が有界集合 $A \subset \mathbf{R}$ の等測包であるとは, G は A を含む集合で, 可算個の開集合の共通部分で与えられ, かつ, $m^*(G) = m^*(A)$ をみたすときに言う.

定理 5.1 より $\mathcal{M}$ はルベーグ可測集合全体でもあり，従って，定理 4.4, 定理 4.5 及び定理 4.12 はルベーグ可測集合に対しても成立する．m^* を $\mathcal{M}$ 上に制限したものを単に m と書き，**ルベーグ測度**と呼ぶ．つまり，$A \in \mathcal{M}$ ならば $m(A) = m^*(A) = m_*(A)$ が成立する．また，3 つ組 $(\mathbf{R}, \mathcal{M}, m)$ を (1 次元) **ルベーグ測度空間**と呼ぶ．このルベーグ測度空間の定義は $\mathbf{R}^n$ に拡張できる．

ここでルベーグ測度空間の性質についてまとめよう．$\mathcal{M}$ は全ての区間を含む $\mathbf{R}$ 上の σ-加法族である．また，$\mathcal{M}$ はすべての零集合を含む．このことは，$N \subset \mathbf{R}$ が零集合であるとき N のあらゆる部分集合も零集合であるから，零集合のすべての部分集合は $\mathcal{M}$ に含まれることを意味する．次に，ルベーグ測度 m は $\mathcal{M}$ を定義域とする $[0, \infty]$-値関数であり，(4.1) で定義した σ-加法性をみたす．つまり，$\mathcal{M}$ 上の互いに素な集合列 $\{A_n\}$ に対して $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$ が成立する．また，$A \in \mathcal{M}$ が区間であれば，$m(A)$ の値は区間の長さ $l(A)$ であることから，一般の集合 $A \in \mathcal{M}$ に対して，$m(A)$ の値は A の自然な「長さ」を与えているものと解釈できる．さらに，m は平行移動不変性を持つこと，$m(A)$ の値は ∞ も取り得ることに注意されたい．

注意 5.2 通常，我々が目にする $\mathbf{R}$ の部分集合はすべて $\mathcal{M}$ に含まれると考えて差し支えない．しかし，$\mathcal{M}$ に含まれない集合，それを**非可測集合**と呼ぶ，も存在する．従って，$\mathcal{M}$ は $\mathbf{R}$ のベキ集合ではない．非可測集合の具体例はいくつか知られているが，選択公理を用いるなど複雑な議論を要するのでここでは紹介しない．

注意 5.3 (ジョルダン測度) $A \subset \mathbf{R}$ に対して，その定義関数 $\mathbf{1}_A$ がリーマン積分可能であるとき，A を**ジョルダン (Jordan) 可測**と呼ぶ．ただし，ジョルダン可測集合の全体 $\mathcal{J}$ は，定理 4.5 の条件 3 をみたさないが，

$$A, B \in \mathcal{J} \text{ ならば } A \cup B \in \mathcal{J} \tag{5.1}$$

はみたす．この $\mathcal{J}$ のように，条件 (5.1) と定理 4.5 の条件 1,2 をみたす集合族を**有限加法族**と呼ぶ．さらに，ジョルダン可測集合 $A \in \mathcal{J}$ に対して，

$$m_J(A) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_A(x) dx$$

として**ジョルダン測度** m_J を定義する．ここで，m_J は $\mathcal{J}$ を定義域とする $[0, \infty]$-値関数で，$m_J(\emptyset) = 0$ であり，かつ，**有限加法性**みたす．つまり，$A, B \in \mathcal{J}$ かつ $A \cap B = \emptyset$ ならば $m_J(A \cup B) = m_J(A) + m_J(B)$ が成立する．一般に，このような性質をみたす集合関数を**有限加法的測度**，さらに 3 つ組 $(\mathbf{R}, \mathcal{J}, m_J)$ を**有限加法的測度空間**と言う．

尚，ルベーグ測度とジョルダン測度の違いを明確にするには 2 次元で考えると分かりやすい．ジョルダンによる方法はタイル張りを用いて外測度と内

測度を定義するが，ルベーグの方法は可算個の様々な大きさの長方形を貼り合わせて面積を測ることに対応している．

以下の定理は定理 5.1 の証明から容易に導かれるが，ルベーグによる可測性の意味を理解する上で重要である．

定理 5.4 (ルベーグ測度の正則性定理)　1. 任意の $\varepsilon > 0$ と $A \subset \mathbf{R}$ に対して，開集合 O で $A \subset O$ かつ $m(O) \leq m^*(A) + \varepsilon$ をみたすものが存在する．つまり，任意の $B \in \mathcal{M}$ に対して，B を含む開集合 O が存在し，$m(O \backslash B) < \varepsilon$ をみたすものが存在する．

2. 任意の $A \subset \mathbf{R}$ に対して，開集合の列 $\{O_n\}$ が存在して，$A \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ かつ $m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n\right) = m^*(A)$ となる．

5.2　一般の集合上の測度空間

ルベーグ測度空間の定義を，一般の集合 X 上に拡張したい．一般の集合に対して「長さ」の概念を導入する際，$\mathbf{R}$ の場合における「区間」のような基準となるものが存在しない[18)]．そこで，まず「長さ」を測定できる集合として，X 上の **σ-加法族** $\mathcal{A}$ を一つ取る．つまり，$\mathcal{A}$ は

1. $X \in \mathcal{A}$,
2. $A \in \mathcal{A}$ ならば $A^c \in \mathcal{A}$,
3. $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{A}$ ならば $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$,

をみたしている．$\mathcal{A}$ は σ-加法族であればなんでも良いので，$\mathcal{A} = \{X, \emptyset\}$ でも X のベキ集合でも良い．このとき，$(X, \mathcal{A})$ を**可測空間**と呼ぶ．そして，$\mathcal{A}$ 上に定義された $[0, \infty]$-値集合関数 μ で，$\mu(\emptyset) = 0$ 及び σ-加法性をみたすものを可測空間 $(X, \mathcal{A})$ 上の**測度**と言い，3 つ組 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ を**測度空間**と呼ぶ．特に，$\mu(X) < \infty$ であるとき，μ を**有限測度**と言い，$(X, \mathcal{A}, \mu)$ を**有限測度空間**と呼ぶ．さらに，$\mu(X) = 1$ であるとき，μ を**確率測度**と言い，$(X, \mathcal{A}, \mu)$ を**確率空間**と呼ぶ．また，可測集合列 $\{X_n\} \subset \mathcal{A}$ で，各 $n \geq 1$ に対して $\mu(X_n) < \infty$ であり，$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ をみたすものが存在するとき，μ 及び対応する測度空間は **σ-有限**であると言う．

問題 5.5 ルベーグ測度空間は σ-有限であることを確認せよ．

[18)] ルベーグ測度空間と同様な方法で一般の集合上に測度空間を構成する方法については，この章の付録を参照せよ．

付録:　ホップの拡張定理

一般の集合 X 上の有限加法的測度空間 $(X, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ から出発し[19]，$\mathcal{A}_0$ に属す集合をルベーグ測度空間における区間のように扱い，外測度と可測性を用いて測度空間を構成する方法について議論する．ただし，証明は割愛する．ここで，μ_0 が $\mathcal{A}_0$ 上 σ-加法的であるとは，互いに素な集合列 $\{A_n\} \subset \mathcal{A}_0$ で，$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_0$ をみたすものに対し，$\mu_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n)$ であるときに言う．また，μ_0 が $\mathcal{A}_0$ 上 σ-有限であるとは，μ_0 が $\mathcal{A}_0$ 上 σ-加法的であり，集合列 $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ で，$\mu_0(A_n) < \infty$ かつ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$ をみたすものが存在するときに言う．さらに，$\mathcal{A}_0$ を含む最小の σ-加法族を $\sigma(\mathcal{A}_0)$ と書く．問題 4.8 の 3 より，このような σ-加法族は常に存在する．これらの準備の下，以下の定理を紹介する:

定理 5.6 (ホップ (Hopf) の拡張定理) μ_0 を $\sigma(\mathcal{A}_0)$ 上の測度に拡張できることと，μ_0 が $\mathcal{A}_0$ 上 σ-加法的であることは同値である．特に，μ_0 が $\mathcal{A}_0$ 上 σ-有限であれば，拡張は一意である．

では実際に μ_0 を拡張して測度空間を構成しよう．まず，$A \subset X$ に対して，

$$\mu^*(A) := \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n) \middle| A_n \in \mathcal{A}_0, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}$$

と定義する．このとき，μ^* は X 上のカラテオドリ外測度[20]となる．さらに，$A \subset X$ が μ^***-可測**であるとは，任意の $E \subset X$ に対して $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ をみたすときに言う．これは定義 4.2 におけるカラテオドリ可測の一般化である．μ^*-可測全体を $\mathcal{B}^*$ とする．このとき，$\mathcal{B}^*$ は $\sigma(\mathcal{A}_0)$ を含む X 上の σ-加法族となる．μ^* の $\mathcal{B}^*$ 上への制限を再び μ^* と書くと，$(X, \mathcal{B}^*, \mu^*)$ は完備測度空間になる[21]．さらに μ^* を $\sigma(\mathcal{A}_0)$ に制限したものを μ とすれば，測度空間 $(A, \sigma(\mathcal{A}_0), \mu)$ を得る．このとき，ホップの拡張定理 (定理 5.6) より，μ_0 が $\mathcal{A}_0$ 上 σ-加法的であれば，任意の $A \in \mathcal{A}_0$ に対して $\mu(A) = \mu_0(A)$ となる．つまり，μ は μ_0 の拡張である．さらに μ_0 が $\mathcal{A}_0$ 上 σ-有限であれば，再び定理 5.6 より，μ が唯一つの拡張となる．また，μ_0 が $\mathcal{A}_0$ 上 σ-有限であるとき，$(X, \mathcal{B}^*, \mu^*)$ は $(A, \sigma(\mathcal{A}_0), \mu)$ の完備化測度空間[22]であることが分かる．このような拡張の例として，ジョルダン測度空間 $(\mathbf{R}, \mathcal{J}, m_J)$ からルベーグ外測度と定理 5.6 を用いてルベーグ測度空間 $(\mathbf{R}, \mathcal{M}, m)$ が得られることがあげられる．

---

[19] ここで，$\mathcal{A}_0$ は X 上の有限加法族であり，μ_0 は $\mathcal{A}_0$ を定義域とする有限加法的測度である．詳しくは注意 5.3 を参照.

[20] 定義は注意 3.5 を参照.

[21] 完備については第 6 週で紹介する.

[22] 完備化測度空間についても第 6 週で紹介する.

第 6 週　測度空間の諸性質

6.1　測度の基本的性質

一般の測度空間 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ に対して，測度の基本性質を紹介する．まず，以下の命題を証明なしで紹介し，その後，測度の連続性を示す．

命題 6.1 $A, B \in \mathcal{A}$ は $A \subset B$ を満たすものとする．このとき，$\mu(A) \leq \mu(B)$ が成立する．また，$\mu(A) < \infty$ ならば $\mu(B\backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$ である．

問題 6.2 上記の命題を証明せよ．

定理 6.3 (測度の連続性)　1. $\{A_n\} \subset \mathcal{M}$ が非減少列，つまり $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ であるならば以下が成立する:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

2. $\{A_n\} \subset \mathcal{M}$ が非増加列，つまり $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ であるならば，$\mu(A_1) < \infty$ であるとき以下が成立する:

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \tag{6.1}$$

証明.　1. $\mu(A_n) = \infty$ なる $n \in \mathbf{N}$ が存在するとき，両辺共に ∞ となる．従って，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して $\mu(A_n) < \infty$ と仮定する．$B_1 = A_1, B_2 = A_2\backslash A_1, \ldots, B_n = A_n\backslash A_{n-1}, \ldots$ とすると，$\{B_n\}$ は互いに素で，$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ が成立する．よって，$A_0 := \emptyset$ とすると，以下が成立する:

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \{\mu(A_n) - \mu(A_{n-1})\} \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \{\mu(A_n) - \mu(A_{n-1})\} = \lim_{N\to\infty} \mu(A_N).\end{aligned}$$

2. $B_1 = \emptyset, B_2 = A_1\backslash A_2, \ldots, B_n = A_1\backslash A_n, \ldots$ とすると，$\{B_n\}$ は非減少列であるから，1 より $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$ が成立する．一方，

$$\begin{aligned}\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1\backslash A_n) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \cap A_n^c) \\ &= A_1 \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) = A_1 \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = A_1\backslash \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)\end{aligned}$$

が成り立つので，

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

であり，$\mu(B_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n)$ であるから，$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ が成り立つ．□

問題 6.4 定理 6.3 の 2 において，条件 $\mu(A_1) < \infty$ が成り立たないとき，(6.1) が成立するとは限らないことを証明せよ．

問題 6.5 可測集合列 $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ に対して，以下が成立することを示せ:

1. (σ-劣加法性) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.
2. $\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n)$.
3. $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$ ならば，$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

6.2 完備性

ルベーグ測度空間において，任意の零集合は可測であったことを思い出そう．つまり，全ての零集合に対し，その任意の部分集合は再び可測になる．このような性質を持つ測度空間を一般に**完備**と言う．正確に言えば，測度空間 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ が完備であるとは，$\mu(F) = 0$ であるような全ての $F \in \mathcal{A}$ に対し，$N \subset F$ ならば $N \in \mathcal{A}$ となるときに言う．従って，ルベーグ測度空間 $(\mathbf{R}, \mathcal{M}, m)$ は完備である．ルベーグ測度空間の完備性より以下が成立する:

命題 6.6 $A \in \mathcal{M}$ かつ $m^*(A\triangle B) = 0$ であるとき，$B \in \mathcal{M}$，かつ，$m(A) = m(B)$ が成立することを示せ．ここで，$A\triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ である．

証明. まず，$m^*(A\triangle B) = 0$ より $A\triangle B$ は零集合となるので可測．ここで，$B = ((A\triangle B)\backslash A) \cup (A\backslash(A\triangle B))$ より，$B \in \mathcal{M}$ である．さらに，

$$\begin{aligned} m(B) &= m((A\triangle B)\backslash A) + m(A\backslash(A\triangle B)) = 0 + m(A \cap B) \\ &= m((A\triangle B)\backslash B) + m(A \cap B) = m(A) \end{aligned}$$

が成り立つ．□

ここで，測度空間 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ の完備性について論じよう．完備測度空間 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ に対して，σ-加法族を入れ替えても完備性は保存されるとは限らない．今，完備でない測度空間 $(X, \mathcal{G}, \mu)$ に対して，$\mathcal{G}$ を含む σ-加法族 $\overline{\mathcal{G}}$ と，μ を $(X, \overline{\mathcal{G}})$ 上に拡張した測度 $\overline{\mu}$ から成る完備測度空間 $(X, \overline{\mathcal{G}}, \overline{\mu})$ の中で最小のものを，$(X, \mathcal{G}, \mu)$ の**完備化**という．完備化測度空間を得るためには，$\mu(F) = 0$ なる $F \in \mathcal{G}$ に対し，F の部分集合，これを**零部分集合**と呼ぶ，をすべて含む最小の σ-加法族を構成すればよい．尚，問題 4.8 の 3 より，このような σ-加法族は常に存在する．

定理 6.7 $\overline{\mathcal{G}} := \{G \cup N | G \in \mathcal{G}, N \subset F \in \mathcal{G} \text{ with } \mu(F) = 0\}$ は，$\mathcal{G}$ 及び任意の零部分集合を含む最小の σ-加法族である．

証明. $\overline{\mathcal{G}}$ が $\mathcal{G}$ 及び任意の零部分集合を含むことは明らかである．そこで $\overline{\mathcal{G}}$ が σ-加法族であることを示す．まず，$G = X$, $N = \emptyset$ と取ることにより，$X \in \overline{\mathcal{G}}$ が示される．次に，$G \cup N \in \overline{\mathcal{G}}$ とせよ．このとき，$(G \cup N)^c = (G \cup F)^c \cup ((F \backslash N) \cap G^c)$ である．$(G \cup F)^c \in \mathcal{G}$ であり，$(F \backslash N) \cap G^c \subset F$ であるから、$(G \cup N)^c \in \overline{\mathcal{G}}$ を得る．そして，$n = 1, 2, \ldots$ に対して，$G_n \cup N_n \in \overline{\mathcal{G}}$ であるとき，$\bigcup_{n=1}^{\infty}(G_n \cup N_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ である．明らかに，$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \in \mathcal{G}$ であり，$\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{G}$ かつ $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = 0$ となる．以上より，$\bigcup_{n=1}^{\infty}(G_n \cup N_n) \in \overline{\mathcal{G}}$ が成立する．

今，$\mathcal{H}$ を $\mathcal{G}$ と任意の零部分集合を含む σ-加法族とする．$G \in \mathcal{G}$ 及び零部分集合 N は $\mathcal{H}$ に含まれるので，$G \cup N \in \mathcal{H}$ となる．従って，$\overline{\mathcal{G}} \subset \mathcal{H}$ である．つまり，$\overline{\mathcal{G}}$ はこのような性質を持つ最小の σ-加法族である． □

任意の $G \in \mathcal{G}$ と任意の零部分集合 N に対し，$\overline{\mu}(G \cup N) := \mu(G)$ と定義する．このとき，$\overline{\mu}$ は μ の拡張で，$G \cup N \in \overline{\mathcal{G}}$ の表現に依らない[23]可測空間 $(X, \overline{\mathcal{G}})$ 上の測度である．さらに，測度空間 $(X, \overline{\mathcal{G}}, \overline{\mu})$ は完備化測度空間となる．

6.3 ボレル集合族

1902 年にルベーグが学位論文を提出する少し前，同じフランスの数学者ボレル (Borel) は，別の測度の概念を与えた．多少正確さは欠くが，ボレルによる測度の定義について論じる[24]．まず，これまでと同様に区間 $[a, b]$(閉区間の代わりに $(a, b]$, $[a, b)$ 及び (a, b) としても同様) の長さ $m_B([a, b])$ を $b - a$

[23] 表現に依らないとは，$\overline{G} \in \overline{\mathcal{G}}$ が $\overline{G} = G \cup N = \tilde{G} \cup \tilde{N}$ と 2 通りの表現を持つとき，$\overline{\mu}(G \cup N) = \overline{\mu}(\tilde{G} \cup \tilde{N})$ が成り立つことを言う．
[24] 文献 [3] を参照．

とする．$\mathbf{R}$ 上の開集合 U は，互いに素である高々可算個の区間の和集合で書ける．つまり，

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad I_n = [a_n, b_n] \text{ or } (a_n, b_n] \text{ or } [a_n, b_n) \text{ or } (a_n, b_n)$$

としたとき，$m_B(U) = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$ と定める．また，2 つの集合 A, B (ただし，$A \subset B$) に対して，$m_B(A)$, $m_B(B)$ の値が定まるのであれば，$m_B(B\backslash A) = m_B(B) - m_B(A)$ として，$B\backslash A$ の測度を定める．さらに，互いに素な集合列 $\{A_n\}$ について，各 $n \in \mathbf{N}$ に対して $m_B(A_n)$ の値が定まるとき，

$$m_B\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m_B(A_n)$$

とする．このようにして，測度が定まる集合の範囲を広げる．測度が定まる集合の全体を $\mathcal{B}$ と書き，これを**ボレル集合族**と呼ぶ．尚，$\mathcal{B}$ に属する集合を**ボレル集合**と言う．以下の定理を証明なしで紹介する．

定理 6.8 1. $\mathcal{B}$ はすべての開区間を含む最小の σ-加法族である．

2. $(\mathbf{R}, \mathcal{B}, m_B)$ は測度空間である．

3. $\mathcal{M}$ は $\mathcal{B}$ の完備化である．

注意 6.9 位相空間 X に対して，その全ての開集合を含む最小の σ-加法族を X 上のボレル集合族と呼び，$\mathcal{B}(X)$ と書く．

定理 6.8 を用いて以下の定理を示すことができる．

定理 6.10 ([5] の定理 3.2 を参照) $A \subset \mathbf{R}$ がルベーグ可測集合であるための必要十分条件は，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，開集合 G と閉集合 F が存在して，$F \subset A \subset G$ かつ $m(G\backslash F) < \varepsilon$ となることである．

第 7 週　可測関数

7.1　可測関数とは

次章からいよいよルベーグ積分について議論する．ルベーグ積分は「測度に関する積分」であるが，その被積分関数は必ず「可測関数」でなければならない．つまり，可測関数とは「ルベーグ積分を定義できる関数」である．そこでこの章では，可測関数の定義を与え，その基本的性質について議論する．尚，ここではルベーグ測度空間 $(\mathbf{R}, \mathcal{M}, m)$ 上の可測関数を主たる考察の対象とする．まず，可測関数は実数だけでなく $\pm\infty$ にも値を取り得る関数として定義される．そこで，$\pm\infty$ を含む四則演算を以下のように定義しておく:

$$
\begin{aligned}
&a + (\pm\infty) = (\pm\infty) + a = \pm\infty \text{ for } \forall a \in \mathbf{R},\ (\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty,\\
&a \times (\pm\infty) = (\pm\infty) \times a = \pm\infty \text{ for } \forall a > 0,\ (\pm\infty) \times (\pm\infty) = \infty,\\
&a \times (\pm\infty) = (\pm\infty) \times a = \mp\infty \text{ for } \forall a < 0,\ (\pm\infty) \times (\mp\infty) = -\infty,\\
&0 \times (\pm\infty) = (\pm\infty) \times 0 = 0,\ \frac{a}{\pm\infty} = 0 \text{ for } \forall a \in \mathbf{R}.
\end{aligned}
$$

ただし，全て複号同順である．尚，$(\pm\infty) - (\pm\infty)$ は定義しない．さらに，$\mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ を $[-\infty, \infty]$ または $\overline{\mathbf{R}}$ と記述する．また，$a \in \mathbf{R}$ に対し，$[a, \infty]$ なども同様に $[a, \infty] := [a, \infty) \cup \{\infty\}$ と定義する．

定義 7.1 $\mathbf{R}$ 上の関数 f が**ルベーグ可測関数**，または単に**可測関数**とは，$\overline{\mathbf{R}}$ に値を取り，任意の区間[25] $I \subset \mathbf{R}$ に対し

$$f^{-1}(I) = \{x \in \mathbf{R} | f(x) \in I\} \in \mathcal{M}$$

が成立し，さらに $f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathcal{M}$ 及び $f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{M}$ をみたすときに言う．また，$\mathcal{M}$ の代わりに $\mathcal{B}$ を取るとき，f を**ボレル可測関数**，または**ボレル関数**という．以後，混乱の恐れがない限り，ルベーグ可測を単に可測と呼ぶ．

注意 7.2 上記の可測関数の定義は，一般の測度空間 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ に対しても有効である．つまり，関数 $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ が**可測**である，または $\mathcal{A}$**-可測**であるとは，任意の区間 $I \subset \mathbf{R}$ に対し

$$f^{-1}(I) = \{x \in \mathbf{R} | f(x) \in I\} \in \mathcal{A}$$

が成立し，さらに $f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathcal{A}$ 及び $f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{A}$ をみたすときに言う．

注意 7.3　1. ボレル可測関数は必ずルベーグ可測関数であるが，その逆は成立しない．ただし，反例は複雑であるため省略する．我々が普段取り扱う関数はすべてボレル可測であると考えて差し支えない．

[25] ここでは，区間として $[a, \infty)$ のような無限区間も含めている．

2. 二つの可測関数 f と g に対して，$\{x \in \mathbf{R} | f(x) \neq g(x)\}$ が零集合になるとき，f と g は**殆ど至るところ** (almost everywhere) 等しいと言い，$f = g$ a.e. などと書く．ルベーグ積分論においてはこの二つの関数を実質的に同一視する．

問題 7.4 f, g, h を可測関数とし，$f = g$ a.e. かつ $g = h$ a.e. が成立するとき，$f = h$ a.e. となることを示せ．

第 1 週で説明したように，ルベーグ積分を定義するためには，この可測関数の定義はごく自然であることが分かる．以下の定理は本質的である．

定理 7.5 関数 $f : \mathbf{R} \to \overline{\mathbf{R}}$ に関して，以下の条件は同値である:

1. f は可測関数である．
2. 任意の $a \in \overline{\mathbf{R}}$ に対して，$f^{-1}((a, \infty]) \in \mathcal{M}$.
3. 任意の $a \in \overline{\mathbf{R}}$ に対して，$f^{-1}([a, \infty]) \in \mathcal{M}$.
4. 任意の $a \in \overline{\mathbf{R}}$ に対して，$f^{-1}([-\infty, a)) \in \mathcal{M}$.
5. 任意の $a \in \overline{\mathbf{R}}$ に対して，$f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{M}$.

証明. $(a, \infty] = (a, \infty) \cup \{\infty\}$ であり，$f^{-1}((a, \infty]) = f^{-1}((a, \infty)) \cup f^{-1}(\{\infty\})$ であることに注意すれば，1⇒2, 1⇒3, 1⇒4, 1⇒5 の成立は明らかである．

2⇒3 については，$[a, \infty] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, \infty\right]$ であるから以下が成立する:

$$f^{-1}([a, \infty]) = \{x \in \mathbf{R} | f(x) \in [a, \infty]\} = \left\{ x \in \mathbf{R} \middle| f(x) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, \infty\right] \right\}$$
$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in \mathbf{R} \middle| f(x) \in \left(a - \frac{1}{n}, \infty\right] \right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left(a - \frac{1}{n}, \infty\right]\right).$$

従って，$f^{-1}([a, \infty]) \in \mathcal{M}$ を得る．同様にして，3⇒4 は $[-\infty, a) = \overline{\mathbf{R}} \backslash [a, \infty]$ より明らか．4⇒5 は $[-\infty, a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[-\infty, a + \frac{1}{n}\right)$ より，5⇒2 は $(a, \infty] = \overline{\mathbf{R}} \backslash [-\infty, a]$ より得られる．

最後に 2⇒1 を示そう．2〜5 までの同値性は既に示されているので，$f^{-1}(\{\infty\})$ 及び $f^{-1}(\{-\infty\})$ の可測性は明らかである．従って，有界区間 I に対して $f^{-1}(I)$ が可測であることを示せば十分である．$I = [a, b]$ であるときは，$[a, b] = [a, \infty] \backslash (b, \infty]$ であり，$f^{-1}(I) = f^{-1}([a, \infty]) \backslash f^{-1}((b, \infty]) \in \mathcal{M}$ となる．同様にして，$[a, b) = [a, \infty] \backslash [b, \infty]$, $(a, b] = (a, \infty] \backslash (b, \infty]$, $(a, b) = (a, \infty] \backslash [b, \infty]$ より，1 が成り立つ． □

注意 7.6 以後，$f^{-1}((a,\infty])(=\{x\in\mathbf{R}|f(x)>a\})$ を省略して $(f>a)$ と書く．

命題 7.7 f を $\mathbf{R}$-値関数とする．任意の $B\in\mathcal{B}$ に対して $f^{-1}(B)\in\mathcal{M}$ であることは，f が可測であるための必要十分条件である．

証明. $\mathcal{B}$ はすべての区間を含むので十分性は明らかである．必要性を示そう．f は可測とし，

$$\mathcal{I}:=\{A\in\mathcal{B}|f^{-1}(A)\in\mathcal{M}\}$$

とおくと，$\mathcal{I}\subset\mathcal{B}$ であり，$\mathcal{I}$ はすべての区間を含む．$\mathcal{B}$ はすべての区間を含む最小の σ-加法族であるから，$\mathcal{I}$ が σ-加法族ならば $\mathcal{I}\supset\mathcal{B}$ が成り立ち，$\mathcal{I}=\mathcal{B}$ を得る．従って，題意は成立する．

以下，$\mathcal{I}$ が σ-加法族であることを示す．$f^{-1}(\mathbf{R})=\mathbf{R}$ より $\mathbf{R}\in\mathcal{I}$ である．次に，$A\in\mathcal{I}$ とすると，$f^{-1}(A^c)=\{x\in\mathbf{R}|f(x)\notin A\}=[f^{-1}(A)]^c$ であるから，$A^c\in\mathcal{I}$ となる．さらに，$A_1,A_2,\cdots\in\mathcal{I}$ に対して，

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\left\{x\in\mathbf{R}\middle|f(x)\in\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x\in\mathbf{R}\middle|f(x)\in A_n\right\}\in\mathcal{M}$$

となり，$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{I}$ を得る．以上より，$\mathcal{I}$ は σ-加法族である． □

問題 7.8

1. f が可測であるとき，任意の開集合 $G\subset\mathbf{R}$ に対して，$f^{-1}(G)\in\mathcal{M}$ であることを示せ．
2. 定数関数，連続関数，単調関数は可測であることを示せ．
3. $A\in\mathcal{M}$ であることと，$\mathbf{1}_A$ が可測であることは同値であることを証明せよ．

7.2 可測関数の基本的性質

可測関数の性質をいくつか列挙する．

定理 7.9 f と g を可測関数とし，$c\in\mathbf{R}$ とする．このとき，$f+g$, cf, fg, $f\vee g$, $f\wedge g$, $|f|$ は可測関数である．ただし，$f+g$ において，$f(x)+g(x)=(\pm\infty)+(\mp\infty)$ となる $x\in\mathbf{R}$ は存在しないものとする．

証明. 任意の $a\in\mathbf{R}$ に対して $(f+g<a)=\bigcup_{r\in\mathbf{Q}}(f<r)\cap(g<a-r)\in\mathcal{M}$ であるから，定理 7.5 より $f+g$ は可測である．次に，$c>0$ ならば，$(cf<a)=(f<a/c)$ より cf は可測である．$c=0$ のとき cf の可測性は明らか．さらに，

$(-f < a) = (f > -a)$ より，任意の $c \in \mathbf{R}$ に対して cf は可測である．fg の可測性を示す．まず，$a > 0$ に対して $(f^2 < a) = (-\sqrt{a} < f < \sqrt{a}) \in \mathcal{M}$ であり，$a \leq 0$ ならば $(f^2 < a) = \emptyset \in \mathcal{M}$ であるから，f^2 は可測である．従って，$fg = \dfrac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$ より，fg の可測性が成り立つ．$f \vee g$, $f \wedge g$ 及び $|f|$ については，$(f \vee g < a) = (f < a) \cap (g < a)$, $(f \wedge g < a) = (f < a) \cup (g < a)$, $(|f| < a) = (f < a) \cap (f > -a)$ より可測性が得られる． □

問題 7.10　1. $|f|$ が可測であっても f は可測とは限らないことを示せ．

2. f と g が可測であっても，合成関数 $g \circ f$ は可測とは限らないことを示せ．ただし，f は $\mathbf{R}$-値関数とする．

3. 上記において，g がボレル可測ならば $g \circ f$ は可測であることを確認せよ．

4. 可測関数 f に対して，$f = g$ a.e. ならば g も可測関数であることを示せ．

問題 7.11 2 つの可測関数 f と g に対して，$\{x \in \mathbf{R} | f(x) \neq g(x)\}$ が可測集合であることを証明せよ．

問題 7.12 $f \neq 0$ である可測関数 f に対して，$1/f$ も可測になることを証明せよ．

定理 7.13 $\overline{\mathbf{R}}$-値関数 f と可測関数列 $\{f_n\}$ に対して，以下が成立する:

1. $N \in \mathbf{N}$ として，$\max\limits_{n \leq N} f_n, \min\limits_{n \leq N} f_n, \sup\limits_{n \geq 1} f_n, \inf\limits_{n \geq 1} f_n, \limsup\limits_{n \to \infty} f_n, \liminf\limits_{n \to \infty} f_n$ は可測関数である．

2. f_n が f に各点収束するならば，f も可測関数である．

3. 殆どすべての $x \in \mathbf{R}$ に対して $f_n(x) \to f(x)$ であるとき[26)]，f は可測である．

証明.　1. まず，$\max, \min \sup, \inf$ については，任意の $a \in \mathbf{R}$ に対して

$$\left(\max_{n \leq N} f_n < a\right) = \bigcap_{n=1}^{N} (f_n < a) \in \mathcal{M},$$

$$\left(\min_{n \leq N} f_n < a\right) = \bigcup_{n=1}^{N} (f_n < a) \in \mathcal{M},$$

$$\left(\sup_{n \geq 1} f_n \leq a\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (f_n \leq a) \in \mathcal{M},$$

$$\left(\inf_{n \geq 1} f_n < a\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (f_n < a) \in \mathcal{M},$$

[26)] より正確には，「ある零集合 N が存在し，任意の $x \in \mathbf{R} \backslash N$ に対して $f_n(x) \to f(x)$ であるとき」という意味である．

が成立することより可測である．尚，sup の場合のみ等号がついていることに注意せよ．さらに，$\limsup, \liminf$ については，

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} f_m = \inf_{n\geq 1} \sup_{m\geq n} f_m,$$
$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{m\geq n} f_m = \sup_{n\geq 1} \inf_{m\geq n} f_m,$$

より可測である．

2. 各 $x \in \mathbf{R}$ に対して $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ であるから，$f(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$ が各点で成り立つので，f は可測である．

3. $A := \left\{ x \in \mathbf{R} \middle| f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \right\}$ とおく．このとき，A^c は零集合である．任意の $a \in \mathbf{R}$ に対して，

$$(f < a) = \{x \in A | f(x) < a\} \cup \{x \in A^c | f(x) < a\}$$

である．右辺の最初の集合は

$$\{x \in A | f(x) < a\} = \left\{ x \in A \middle| \limsup_{n\to\infty} f_n(x) < a \right\}$$

であるから可測となり，2 つ目の集合 $\{x \in A^c | f(x) < a\}$ も零集合 A^c の部分集合なので可測である．従って，$(f < a) \in \mathcal{M}$ を得る．因みに，A^c 上 f はどんな値をとっても構わない． □

注意 7.14 1. 上記の定理 7.13 の 3 における収束を**概収束**といい，$f_n \to f$ a.e. などと書く．各点収束との違いに注意せよ．

2. 定理 7.13 の 3 は，可測関数列が極限を持つならば再び可測になることを主張している．この事実はルベーグ積分を考える際に非常に重要である．

3. 一般に，$\mathbf{R}$-値関数の列が各点収束または概収束しているとき，極限関数は $\mathbf{R}$-値になるとは限らず，$\pm\infty$ にも値を取り得る．このような事情もあり，可測関数を $[-\infty, +\infty]$-値関数として定義するのである．

以下の 2 つの定理を証明なしで紹介する:

定理 7.15 (エゴロフ (Egonov) の定理) 有界閉区間 $[a, b]$ 上に定義された $\mathbf{R}$-値可測関数列 $\{f_n\}$ が関数 f に概収束しているとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$m(A) < \varepsilon$ をみたす可測集合 $A \subset [a, b]$ が存在し，$[a, b]\backslash A$ 上で $\{f_n\}$ は f に一様収束する．

定理 7.16 (ルージン (Lusin) の定理) f を有界閉区間 $[a, b]$ 上に定義された $\mathbf{R}$-値可測関数とする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$[a, b]$ 上の連続関数 g で $m(\{x \in [a, b] | f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$ をみたすものが存在する．

第 8 週　ルベーグ積分の定義 1

3 つのステップに分けてルベーグ積分を定義する．イントロダクションでも述べたように，リーマン積分との違いは「横」にたすのか,「縦」にたすのかの違いである．この点に留意しながら学んで欲しい．尚，ルベーグ積分の定義は何通りものやり方がある．ここでは，[4] に沿った方法で定義する．

Step 1: 有限個の値だけを取る $\mathbf{R}$-値可測関数 φ を**単関数**と呼ぶ．つまり，φ の値域は実数の有限集合 $\{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$ であり，

$$A_n := \varphi^{-1}(\{a_n\}), \quad n = 1, 2, \ldots, N,$$

は可測集合となる．従って，$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \mathbf{1}_{A_n}(x)$ と書ける．尚，$\{A_n\}$ は互いに素な可測集合の有限列で，$\bigcup_{n=1}^{N} A_n = \mathbf{R}$ をみたす．このような有限列を $\mathbf{R}$ の**有限可測分割**と呼ぶ．φ が非負単関数であるとき，つまり各 a_n が非負であるとき，φ の**ルベーグ積分**を

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi dm := \sum_{n=1}^{N} a_n m(A_n) \tag{8.1}$$

と定義する．ここで，$m(A_n) = \infty$ の場合も許すので，$0 \times \infty = 0$ と定義しておいたのである．

注意 8.1　1. 上記の定義 (8.1) は非負単関数の表現の仕方に依らない．従って，(8.1) は無矛盾 (well-defined) である．

2. 可測集合 $A \in \mathcal{M}$ 上に積分を制限する場合は $\int_A \varphi dm := \int_{\mathbf{R}} \varphi \mathbf{1}_A dm$ と定義する．

ここで非負単関数のルベーグ積分に関する基本的性質をまとめておく．

定理 8.2 φ と ψ を非負単関数とする．以下が成立する:

1. $\varphi = \mathbf{1}_A$，$A \in \mathcal{M}$，であるとき，$\int_{\mathbf{R}} \varphi dm = m(A)$.
2. 任意の $a \geq 0$ に対して，$\int_{\mathbf{R}} (a\varphi) dm = a \int_{\mathbf{R}} \varphi dm$
3. $\int_{\mathbf{R}} (\varphi + \psi) dm = \int_{\mathbf{R}} \varphi dm + \int_{\mathbf{R}} \psi dm$.
4. 任意の $x \in \mathbf{R}$ に対して $\varphi(x) \leq \psi(x)$ ならば，$\int_{\mathbf{R}} \varphi dm \leq \int_{\mathbf{R}} \psi dm$.

5. $\{\varphi_k\}$ を非負単関数列とし，任意の $x \in \mathbf{R}$ に対して，$\{\varphi_k(x)\}_{k\geq 1}$ は非減少列，かつ，$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) \geq \psi(x)$ をみたすとき，以下が成立する:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{R}} \varphi_k dm \geq \int_{\mathbf{R}} \psi dm. \tag{8.2}$$

証明. φ, ψ はそれぞれ，$N, L \in \mathbf{N}$，非負実数列 $\{a_n\}, \{b_l\}$，$\mathbf{R}$ の有限可測分割 $\{A_n\}, \{B_l\}$ を用いて

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \mathbf{1}_{A_n}(x), \quad \psi(x) = \sum_{l=1}^{L} b_l \mathbf{1}_{B_l}(x)$$

と書けるものとする．

1. $N = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $A_1 = A$, $A_2 = A^c$ と取ればよい．
2. $a\varphi$ も非負単関数であることに注意すれば，積分の定義 (8.1) より明らか．
3. $\{A_n \cap B_l\}_{1\leq n\leq N, 1\leq l\leq L}$ は有限可測分割であることに注意しよう．従って，

$$\begin{aligned}
\varphi(x) + \psi(x) &= \sum_{n=1}^{N} a_n \mathbf{1}_{A_n}(x) + \sum_{l=1}^{L} b_l \mathbf{1}_{B_l}(x) \\
&= \sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{L} a_n \mathbf{1}_{A_n}(x)\mathbf{1}_{B_l}(x) + \sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{L} b_l \mathbf{1}_{A_n}(x)\mathbf{1}_{B_l}(x) \\
&= \sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{L} (a_n + b_l)\mathbf{1}_{A_n}(x)\mathbf{1}_{B_l}(x) \\
&= \sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{L} (a_n + b_l)\mathbf{1}_{A_n\cap B_l}(x)
\end{aligned}$$

となり，$\varphi + \psi$ も非負単関数となる．よって，以下が成立する:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}} (\varphi + \psi) dm &= \sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{L} (a_n + b_l) m(A_n \cap B_l) \\
&= \sum_{n=1}^{N} a_n \sum_{l=1}^{L} m(A_n \cap B_l) + \sum_{l=1}^{L} b_l \sum_{n=1}^{N} m(A_n \cap B_l) \\
&= \sum_{n=1}^{N} a_n m(A_n) + \sum_{l=1}^{L} b_l m(B_l) = \int_{\mathbf{R}} \varphi dm + \int_{\mathbf{R}} \psi dm.
\end{aligned}$$

4. $A_n \cap B_l \neq \emptyset$ であるとき，$a_n \leq b_l$ となる．よって，以下が成立する:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}} \varphi dm &= \sum_{n=1}^{N} a_n m(A_n) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{L} a_n m(A_n \cap B_l) \\
&\leq \sum_{l=1}^{L}\sum_{n=1}^{N} b_l m(A_n \cap B_l) = \sum_{l=1}^{L} b_l m(B_l) = \int_{\mathbf{R}} \psi dm.
\end{aligned}$$

5. まず，$B := \{x \in \mathbf{R} | \psi(x) > 0\}$ とおく．さらに，$k, j \in \mathbf{N}$ に対して，

$$A_j^k := \left\{ x \in \mathbf{R} \middle| \varphi_k(x) \geq \psi(x) - \frac{1}{j} \right\}$$

とする．$m(B) = \infty$ と仮定する．このとき，任意の $k, j \in \mathbf{N}$ に対して，

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi_k dm \geq \int_{\mathbf{R}} \varphi_k \mathbf{1}_B dm \geq \int_{\mathbf{R}} \varphi_k \mathbf{1}_{B \cap A_j^k} dm$$

が成立する．ここで，ψ の値域が有限集合であることに注意して，$\alpha := \min_{x \in B} \psi(x)$ とする．また，$\frac{1}{j} < \alpha$ となる $j \in \mathbf{N}$ を固定する．この定理の 1,2 及び 4 より

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi_k \mathbf{1}_{B \cap A_j^k} dm \geq \left(\alpha - \frac{1}{j} \right) m(B \cap A_j^k)$$

が成立する．一方，集合列 $\{A_j^k\}_{k \geq 1}$ は非減少列で $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_j^k = \mathbf{R}$ となる．よって，定理 6.3 より $\lim_{k \to \infty} m(B \cap A_j^k) = m(B \cap \mathbf{R}) = m(B) = \infty$ となり，$\lim_{k \to \infty} \int_{\mathbf{R}} \varphi_k dm = \infty$ であるから，不等式 (8.2) を得る．

次に $m(B) < \infty$ とする．ここでも $\frac{1}{j} < \alpha$ となる $j \in \mathbf{N}$ を一つ取る．このとき，$\beta := \max_{x \in B} \psi(x)$ と定義し，A_j^k 及び B の定義，φ_k の非負性に注意すると

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}} \varphi_k dm &\geq \int_{\mathbf{R}} \varphi_k \mathbf{1}_{B \cap A_j^k} dm \geq \int_{\mathbf{R}} \left(\psi - \frac{1}{j} \right) \mathbf{1}_{B \cap A_j^k} dm \\
&= \int_{\mathbf{R}} \psi \mathbf{1}_{B \cap A_j^k} dm - \frac{1}{j} m(B \cap A_j^k) \\
&= \int_{\mathbf{R}} \psi \mathbf{1}_B dm - \int_{\mathbf{R}} \psi \mathbf{1}_{B \setminus A_j^k} dm - \frac{1}{j} m(B \cap A_j^k) \\
&\geq \int_{\mathbf{R}} \psi dm - \beta m(B \setminus A_j^k) - \frac{1}{j} m(B)
\end{aligned}$$

を得る．ここで，$\{A_j^k\}_{k \geq 1}$ の増大性より $\lim_{k \to \infty} m(B \setminus A_j^k) = m\left(B \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} (A_j^k)^c \right)$ となるが，$x \in (A_j^k)^c$ のとき $\varphi_k(x) < \psi(x) - \frac{1}{j}$ であるから，$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} (A_j^k)^c$ であるとき $\lim_{k \to \infty} \varphi_k(x) \geq \psi(x)$ は成立し得ない．よって，$\lim_{k \to \infty} m(B \setminus A_j^k) = 0$ を得る．従って，

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\mathbf{R}} \varphi_k dm \geq \int_{\mathbf{R}} \psi dm - \frac{1}{j} m(B)$$

が成立する．最後に，$j \to \infty$ とすれば，$m(B) < \infty$ より (8.2) を得る． □

注意 8.3 定理 8.2 の 4 と 5 における「任意の $x \in \mathbf{R}$」は「殆ど至るところ」に書き換えても成立する．例えば 4 は「$\varphi \leq \psi$ a.e. ならば」に書き換えられる．ルベーグ積分論において零集合は実質的に無視しても構わないので，今後は「a.e.」も省略し単に「$\varphi \leq \psi$」と書くこともある．また，定理 8.2 の 5 では非負単関数の非減少列 $\{\varphi_k\}$ を扱っているが，これも「任意の $k \in \mathbf{N}$ に対して $\varphi_k \leq \varphi_{k+1}$ a.e.」としても 5 の主張は成り立つ．今後，可測関数列が非減少または非増大と言うときはこのような意味のものを指し，さらに「殆ど至るところ」や「a.e.」の文言も省略することがある．

Step 2: 次に，一般の非負可測関数 f に対するルベーグ積分を定義しよう．f に対して，f を越えない非負単関数の積分全体を

$$Y(f) := \left\{ \int_{\mathbf{R}} \varphi dm \middle| 0 \leq \varphi \leq f, \varphi \text{ は非負単関数} \right\}$$

と書いて，f の**ルベーグ積分**をその sup で定義する．つまり，

$$\int_{\mathbf{R}} f(x) dm := \sup Y(f) \tag{8.3}$$

と定義する．

注意 8.4 非負可測関数に対するルベーグ積分には別の定義がある．f に概収束する非負単関数の非減少列 $\{\varphi_n\}$ に対して，

$$\int_{\mathbf{R}} f dm := \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} \varphi_n dm \tag{8.4}$$

と定義することも可能である．この定義が無矛盾であるためには，f に概収束する非負単関数の任意の非減少列 $\{\varphi_n\}$ に対して，極限 $\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n dm$ の値が一致していなければならない．実はこのことは定理 8.2 の 5 より保証される[27]．さらに，2 つの定義 (8.3) と (8.4) が同値であることも定理 8.2 の 5 より示される．また，このような非減少列 $\{\varphi_n\}$ が必ず存在することも確認しなければならない．今，$n, k \in \mathbf{N}$ に対して，

$$A_k^n := \left\{ x \in \mathbf{R} \middle| \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \right\}, \quad A^n := \{x \in \mathbf{R} | f(x) \geq n\},$$

とおく．f は可測なので A_k^n 及び A^n は可測集合となる．ここで，

$$\varphi_n(x) := \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbf{1}_{A_k^n}(x) + n\mathbf{1}_{A^n}$$

とおくと，$\{\varphi_n\}$ は f に各点収束する非負単関数の非減少列となる．この定義 (8.4) より，ルベーグ積分が「横」の短冊の和によって定義されていることがイメージできるであろう．

[27] 何故保証されるのかについて考えることは良い演習問題であろう．

第 9 週　ルベーグ積分の定義 2

非負可測関数に対するルベーグ積分の諸性質を示すことから始めよう.

定理 9.1 f と g を非負可測関数とする．以下が成立する:

1. $a, b \geq 0$ に対して，$\displaystyle\int_{\mathbf{R}} (af + bg)dm = a\int_{\mathbf{R}} fdm + b\int_{\mathbf{R}} gdm.$
2. $f \leq g$ ならば，$\displaystyle\int_{\mathbf{R}} fdm \leq \int_{\mathbf{R}} gdm.$
3. $A, B \in \mathcal{M}$ かつ $B \subset A$ ならば，$\displaystyle\int_B fdm \leq \int_A fdm.$
4. A が零集合ならば，$\displaystyle\int_A fdm = 0.$
5. $A, B \in \mathcal{M}$ かつ $A \cap B = \emptyset$ ならば，$\displaystyle\int_{A\cup B} fdm = \int_A fdm + \int_B fdm.$
6. (平均値の定理) A 上 $a \leq f \leq b$ ならば，$am(A) \leq \displaystyle\int_A fdm \leq bm(A).$
7. $f = 0$ a.e. と $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} fdm = 0$ は同値である.

証明.　1. まず，$a \geq 0$ に対して $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} (af)dm = a\int_{\mathbf{R}} fdm$ が成立することを示す．$a > 0$ として一般性を失わない．φ が $\varphi \leq f$ なる非負単関数であるとき，$a\varphi$ も非負単関数で $a\varphi \leq af$ をみたす．一方，$\tilde{\varphi} \leq af$ なる非負単関数 $\tilde{\varphi}$ に対して，$\tilde{\varphi} = a\varphi$ によって非負単関数 φ を定義すれば，$\varphi \leq f$ をみたす．以上より

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}} (af)dm &= \sup\left\{\int_{\mathbf{R}} \tilde{\varphi}dm \middle| 0 \leq \tilde{\varphi} \leq af\right\} = \sup\left\{\int_{\mathbf{R}} (a\varphi)dm \middle| 0 \leq \varphi \leq f\right\} \\ &= a\sup\left\{\int_{\mathbf{R}} \varphi dm \middle| 0 \leq \varphi \leq f\right\} = a\int_{\mathbf{R}} fdm\end{aligned}$$

が成立する．ここで，最初と最後の等号は第 8 週の Step 2 より，3 つ目の等号は定理 8.2 の 2 より成立する.

残りは $a = b = 1$ として $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} (f+g)dm = \int_{\mathbf{R}} fdm + \int_{\mathbf{R}} gdm$ を示せば十分である．$\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ と $\{\psi_n\}_{n\geq 1}$ を，それぞれ f と g に収束する非負単関数の非減少列とする．このとき，$\{\varphi_n + \psi_n\}_{n\geq 1}$ は $f+g$ に収束する非負単関数の非減少列であるから，定義 (8.4) と定理 8.2 の 3 より以下が成立する:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}} (f+g)dm &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}} (\varphi_n + \psi_n)dm = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}} \varphi_n dm + \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}} \psi_n dm \\ &= \int_{\mathbf{R}} fdm + \int_{\mathbf{R}} gdm.\end{aligned}$$

2. 非負単関数 φ が $\varphi \le f$ をみたすとき，$\varphi \le g$ もみたすことより成立する．
3. 注意 8.1 及びこの定理の 2 より，

$$\int_B f dm = \int f \mathbf{1}_B dm \le \int f \mathbf{1}_A dm = \int_A f dm.$$

4. $0 \le \varphi \le f\mathbf{1}_A$ をみたす非負単関数 φ は A^c 上 0 であり，$\beta := \max_{x \in A} \varphi(x)$ は有限である．よって，$\int_{\mathbf{R}} \varphi dm \le \beta m(A) = 0$ となる．従って，定義 (8.3) より $\int_A f dm = \int_{\mathbf{R}} f\mathbf{1}_A dm = 0$ となる．
5. $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$ より成立．
6. $g := a\mathbf{1}_A$ とすると，A 上 $g \le f$ であり，この定理の 2 より

$$am(A) = \int_A g dm \le \int_A f dm$$

が成立する．もう一つの不等号も同様にして示せる．
7. $f = 0$ a.e. とする．$A = (f = 0)$ とおくと，A^c は零集合であり，上記の 4 及び 5 より

$$\int_{\mathbf{R}} f dm = \int_A f dm + \int_{A^c} f dm = \int_A f dm = 0$$

となる．逆を示そう．$\int_{\mathbf{R}} f dm = 0$ とする．任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して $A_n = (f > 1/n)$ とおく．この定理の 3 と 6 より，$\int_{\mathbf{R}} f dm \ge \int_{A_n} f dm \ge \frac{1}{n} m(A_n)$ が成立する．よって，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して A_n は零集合である．ここで，$(f > 0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ より $(f > 0)$ は零集合．以上より $f = 0$ a.e. となる． □

問題 9.2 f を非負可測関数とする．このとき，$A, B \in \mathcal{M}$ に対し，

$$\int_{A \cup B} f dm + \int_{A \cap B} f dm = \int_A f dm + \int_B f dm$$

が成立することを示せ．

Step 3: 一般の可測関数に対するルベーグ積分を定義する．まず，

$$f^+ := f \vee 0 = \max(f, 0), \quad f^- := (-f) \vee 0 = \max(-f, 0)$$

とおく．つまり，$f = f^+ - f^-$ と $|f| = f^+ + f^-$ が成立する．尚，f が可測であることと，f^+ と f^- が共に可測であることは同値である．可測関数 f に対して $\int_{\mathbf{R}} f^+ dm$ と $\int_{\mathbf{R}} f^- dm$ が共に有限であるとき，f は**可積分**であるといい，可積分関数の全体を $L^1(\mathbf{R})$ または単に L^1 と書く．さらに，f に対する**ルベーグ積分**を

$$\int_{\mathbf{R}} f dm := \int_{\mathbf{R}} f^+ dm - \int_{\mathbf{R}} f^- dm$$

と定義する．尚，f が可積分ならば $\int_{\mathbf{R}} f dm$ の値は有限となる．また，少なくとも $\int_{\mathbf{R}} f^+ dm$ と $\int_{\mathbf{R}} f^- dm$ のどちらか一方が有限であるときは，$\pm\infty$ も含めて積分 $\int_{\mathbf{R}} f dm$ の値は確定する．このとき，f を**積分確定な関数**と呼ぶ．一方，$\int_{\mathbf{R}} f^+ dm = \int_{\mathbf{R}} f^- dm = \infty$ のときは，$\infty - \infty$ の不定形になり，$\int_{\mathbf{R}} f dm$ は定義できない．

問題 9.3 f, g を積分確定な関数とする．以下を示せ．

1. $\int_{\mathbf{R}} |f| dm = \int_{\mathbf{R}} f^+ dm + \int_{\mathbf{R}} f^- dm.$
2. $\left| \int_{\mathbf{R}} f dm \right| \leq \int_{\mathbf{R}} |f| dm.$
3. (単調性) $f \leq g$ ならば，$\int_{\mathbf{R}} f dm \leq \int_{\mathbf{R}} g dm.$
4. (線形性) L^1 はベクトル空間である．つまり，$f, g \in L^1$，$a, b \in \mathbf{R}$ に対して，$af+bg \in L^1$ である．さらに，$\int_{\mathbf{R}} (af + bg) dm = a \int_{\mathbf{R}} f dm + b \int_{\mathbf{R}} g dm$ が成立する．

命題 9.4 (チェビシェフ (Chebyshev) の不等式) f を可測関数とする．$a > 0$, $p > 0$ に対して，

$$m(|f| \geq a) \leq \frac{1}{a^p} \int_{\mathbf{R}} |f|^p dm$$

が成立する．

証明. $A = (|f| \geq a)$ とおく．このとき，定理 9.1 の諸結果と非負可測関数の積分値は非負になることを用いて，

$$\int_{\mathbf{R}} |f|^p dm = \int_A |f|^p dm + \int_{A^c} |f|^p dm \geq \int_A a^p dm = a^p m(A)$$

を得る． □

命題 9.5 可測関数 f が可積分ならば $|f| < \infty$ a.e. となる．

証明. $A = (|f| = \infty)$ とし，$m(A) > 0$ と仮定する．任意の $M > 0$ に対して A 上 $|f| \geq M$ であるから，

$$\int_{\mathbf{R}} |f| dm \geq \int_A |f| dm \geq M m(A)$$

が任意の $M > 0$ に対して成立する．従って，$\int_{\mathbf{R}} |f| dm = \infty$ となり矛盾．よって，$|f| < \infty$ a.e. となる． □

命題 9.6 2 つの可積分関数 f, g に対して以下が成立する:.

1. 任意の $A \in \mathcal{M}$ に対して $\int_A f dm \leq \int_A g dm$ ならば $f \leq g$ である.
2. 任意の $A \in \mathcal{M}$ に対して $\int_A f dm = \int_A g dm$ ならば $f = g$ である.

証明. 2 は 1 が示されれば明らかなので, 1 のみ示そう. $f \leq g$ a.e. でないとする. つまり, $A = (f > g)$ としたとき, $m(A) > 0$ と仮定する. 今, $n \in \mathbf{N}$ に対して, $A_n = \left(f - g \geq \frac{1}{n}\right)$ とすると, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ である. A_n 及び A の可測性も明らか. $\{A_n\}$ は非減少列であるから, 定理 6.3 より $m(A) = \lim_{n\to\infty} m(A_n)$ が成立する. よって, $m(A) > 0$ より十分大きな $n \in \mathbf{N}$ に対して $m(A_n) > 0$ となる. そのような $n \in \mathbf{N}$ に対して $(f-g)\mathbf{1}_A \geq \frac{1}{n}\mathbf{1}_{A_n}$ が成り立つので, 定理 9.1 の 2 より $\int_{\mathbf{R}} (f-g)\mathbf{1}_A dm \geq \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{n}\mathbf{1}_{A_n} dm > 0$ が成立する. ところが, 仮定より $0 \geq \int_A f dm - \int_A g dm = \int_{\mathbf{R}} (f-g)\mathbf{1}_A dm$ となるので矛盾が生じる. よって, $m(A) = 0$ となる. □

問題 9.7 f を積分確定な関数とする. $A \in \mathcal{M}$ に対して, 以下が成立することを示せ:

$$m(A) \inf_A f \leq \int_A f dm \leq m(A) \sup_A f.$$

問題 9.8 f を可積分関数とする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在し, $m(A) < \delta$ となる任意のボレル集合 $A \in \mathcal{B}$ に対して $\int_A |f| dm < \varepsilon$ が成り立つことを証明せよ.

第 10 週　ルベーグの収束定理 1

次章，ルベーグ積分論における最大の山場ともいうべきルベーグの収束定理[28]を証明する．これは極限 lim と積分 $\int$ の交換に関するものであり，「どのような条件の下で交換可能となるのか」を明確にしている点が重要である．リーマン積分を用いて極限と積分の交換可能条件を述べようとすると，一様収束等の概念が必要となり複雑になる[29]．一方，ルベーグ積分を用いると，この交換可能条件を簡潔に書くことができる．証明は，単調収束定理，ファトゥ(Fatou) の補題，ルベーグの収束定理の順で示すのが定石である．この章では単調収束定理とファトゥの補題を証明する．これらは単にルベーグの収束定理を示すための準備に留まらず，それ自身非常に有用な結果である．

以下ではルベーグ測度空間 $(\mathbf{R}, \mathcal{M}, m)$ 上で議論するが，同様の議論は一般の測度空間上でも成立することに注意されたい．

定理 10.1 (単調収束定理) 非負可測関数の非減少列 $\{f_n\}$ がある可測関数 f に概収束しているとき，つまり，$\lim_{n\to\infty} f_n = f$ a.e. であるとき，以下が成立する:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} f_n dm = \int_{\mathbf{R}} f dm.$$

証明.　各 $n \in \mathbf{N}$ に対して，f_n に収束する非負単関数の非減少列 $\{\varphi_n^k\}_{k\geq 1}$ を取る:

$$\begin{array}{ccc}
\varphi_1^1 \leq \varphi_1^2 \leq \cdots \leq \varphi_1^k \leq \ldots \to f_1 & & \\
\varphi_2^1 \leq \varphi_2^2 \leq \cdots \leq \varphi_2^k \leq \ldots \to f_2 & & \\
\vdots & & \vdots \\
\varphi_n^1 \leq \varphi_n^2 \leq \cdots \leq \varphi_n^k \leq \ldots \to f_n & & \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

今，$\psi^k := \max\{\varphi_1^k, \varphi_2^k, \ldots, \varphi_k^k\}$ とおくと，任意の $k \in \mathbf{N}$ に対して $\psi^k \leq \psi^{k+1} \leq f$ が成立し，さらに $n = 1, 2, \ldots, k$ に対して $\varphi_n^k \leq \psi^k$ が成立する．よって，これらの不等式において k に関する極限を取れば，各 $n \in \mathbf{N}$ に対して $f_n \leq \lim_{k\to\infty} \psi^k \leq f$ が成立する．従って，$\{\psi^k\}$ は f に収束する非負単関数の非減少列である．よって，ルベーグ積分の定義より $\int_{\mathbf{R}} f dm = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{R}} \psi^k dm$ であり，$\psi^k \leq f_k$ であるから，

$$\int_{\mathbf{R}} f dm = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{R}} \psi^k dm \leq \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{R}} f_k dm \leq \int_{\mathbf{R}} f dm$$

を得る．最後の不等号は $f_k \leq f$ による．よって，定理 10.1 が成立する．□

---

[28] 本講義ではルベーグの優収束定理とルベーグの有界収束定理をまとめてルベーグの収束定理と呼んでいる．

[29] この点については注意 11.5 を参照せよ．

注意 10.2　1. 実は，定理 10.1 において可測関数の非減少列 $\{f_n\}$ は非負である必要はない．例えば，各 f_n が可積分であるならば，$g_n := f_n - f_1$ とすれば $\{g_n\}$ は非負可測関数の非減少列となり，$\{f_n\}$ に対して定理 10.1 と同じ結論が得られるのである．

2. $f_n(x) = -\mathbf{1}_{[n,\infty)}(x)$ とすると，これは非減少列であり 0 に各点収束する．ただし，非負でも可積分でもない．一方，$\int_{\mathbf{R}} f_n dm = -\infty$ であるから定理 10.1 は成立しない．

命題 10.3 (正項級数の項別積分定理) 非負可測関数列 $\{f_n\}$ に対し，以下が成立する:

$$\int_{\mathbf{R}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbf{R}} f_n dm.$$

証明.　$g_k := \sum_{n=1}^{k} f_n$ とおくと，$\{g_k\}$ は非負可測関数の非減少列で，

$$\lim_{k\to\infty} g_k = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ a.e.}$$

が成り立つ．従って，単調収束定理 (定理 10.1) 及び定理 9.1 の 1 より以下が成立する:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n dm &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{R}} g_k dm = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{R}} \sum_{n=1}^{k} f_n dm \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \int_{\mathbf{R}} f_n dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbf{R}} f_n dm.\end{aligned}$$

□

問題 10.4 $0 < x < 1$ に対して，$1 + x + x^2 + \cdots = (1-x)^{-1}$ を積分することによって，$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \infty$ が成り立つことを証明せよ．

問題 10.5 f を可積分とし，$f_n = f\mathbf{1}_{[-n,n]}$ とおく．このとき，$\lim_{n\to 0} \int_{\mathbf{R}} |f - f_n| dm = 0$ となることを示せ．

系 10.6 非負可測関数列 $\{f_n\}$ が $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbf{R}} f_n dm < \infty$ をみたすとき，$\sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty$ a.e. である．

定理 10.7 (ファトゥの補題) 非負可測関数列 $\{f_n\}$ に対して，

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}} f_n dm \geq \int_{\mathbf{R}} \liminf_{n\to\infty} f_n dm$$

が成立する．

証明. $n\in\mathbf{N}$ に対して，$g_n := \inf_{k\geq n} f_k$ とおくと，$\{g_n\}$ は非減少列で，$g_n \leq f_n$ かつ $\lim_{n\to\infty} g_n = \liminf_{n\to\infty} f_n$ をみたす．よって，単調収束定理 (定理 10.1) より以下が成立する:

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}} f_n dm &\geq \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}} g_n dm = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}} g_n dm \\ &= \int_{\mathbf{R}} \lim_{n\to\infty} g_n dm = \int_{\mathbf{R}} \liminf_{n\to\infty} f_n dm.\end{aligned}$$

□

命題 10.8 f を非負可測関数とし，任意の $A\in\mathcal{M}$ に対して

$$\Phi(A) := \int_A f dm = \int_{\mathbf{R}} f\mathbf{1}_A dm$$

とおくと，Φ は可測空間 $(\mathbf{R},\mathcal{M})$ 上の測度である．

証明. 5.2 節にある測度の定義に沿って，Φ が $(\mathbf{R},\mathcal{M})$ 上の測度であることを示す．まず，$f\mathbf{1}_A$ は非負可測関数なので，定理 9.1 より $A\in\mathcal{M}$ に対して $\Phi(A)\geq 0$ となる．次に，再び定理 9.1 より $\Phi(\emptyset) = \int_\emptyset f dm = 0$ となる．さらに，$\{A_n\}$ を互いに素である可測集合の列とし，各 $k\in\mathbf{N}$ に対して $g_k := f\mathbf{1}_{\bigcup_{n=1}^k A_n}$ とおく．このとき，$\{g_k\}$ は可測関数の非減少列であり，$g_k \to f\mathbf{1}_{\bigcup_{n=1}^\infty A_n}$ a.e. である．従って，定理 9.1，定理 10.1 及び $\{A_n\}$ が互いに素であることより

$$\begin{aligned}\Phi\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) &= \int_{\bigcup_{n=1}^\infty A_n} f dm = \int_{\mathbf{R}} f\mathbf{1}_{\bigcup_{n=1}^\infty A_n} dm = \int_{\mathbf{R}} \lim_{k\to\infty} g_k dm \\ &= \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbf{R}} g_k dm = \lim_{k\to\infty}\int_{\bigcup_{n=1}^k A_n} f dm = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^k \int_{A_n} f dm \\ &= \sum_{n=1}^\infty \Phi(A_n)\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，Φ は σ-加法性を持つ． □

第 11 週　ルベーグの収束定理 2

前章は単調収束定理 (定理 10.1) を示し，それを用いてファトゥの補題 (定理 10.7) を示した．ここでは，定理 10.7 を用いてルベーグの優収束定理を証明する．さらに，ルベーグの有界収束定理も紹介するが，これは優収束定理から直ちに導かれる．

11.1　ルベーグの収束定理

定理 11.1 (ルベーグ (Lebesgue) の優収束定理) 可測関数列 $\{f_n\}$ と可測関数 f が

1. $f_n \to f$ a.e.,
2. ある可積分関数 h が存在して，任意の $n \geq 1$ に対して $|f_n| \leq h$ a.e.,

をみたすならば，f も可積分で

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} f_n dm = \int_{\mathbf{R}} f dm \tag{11.1}$$

が成立する．

証明.　まず，f が可積分であることは条件より従う．次に，$\{f_n + h\}$ は非負可測関数列であるから，ファトゥの補題 (定理 10.7) より

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} (f_n + h) dm \geq \int_{\mathbf{R}} \liminf_{n\to\infty} (f_n + h) dm$$

が成立する．よって，

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} f_n dm + \int_{\mathbf{R}} h dm \geq \int_{\mathbf{R}} \liminf_{n\to\infty} f_n dm + \int_{\mathbf{R}} h dm$$

であり，h は可積分であるから，$\{f_n\}$ が f に概収束することも併せると

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} f_n dm \geq \int_{\mathbf{R}} \liminf_{n\to\infty} f_n dm = \int_{\mathbf{R}} f dm \tag{11.2}$$

を得る．一方，$\{-f_n + h\}$ も非負可測関数列であるから，再び定理 10.7 より

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} (-f_n + h) dm \geq \int_{\mathbf{R}} \liminf_{n\to\infty} (-f_n + h) dm$$

が成立する．上記と同様の計算によって，

$$\begin{aligned} -\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} f_n dm = \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} (-f_n) dm &\geq \int_{\mathbf{R}} \liminf_{n\to\infty} (-f_n) dm \\ = \int_{\mathbf{R}} (-f) dm = -\int_{\mathbf{R}} f dm \end{aligned} \tag{11.3}$$

を得る．(11.2) と (11.3) より，$\displaystyle\int_{\mathbf{R}} f_n dm$ は極限を持ち (11.1) が成立する．□

系 11.2 (ルベーグの有界収束定理) A を $m(A) < \infty$ をみたす可測集合とする．可測関数列 $\{f_n\}$ と可測関数 f が

1. $f_n \to f$ a.e.,
2. $M > 0$ が存在して，任意の $n \geq 1$ に対して $|f_n| \leq M$ a.e. on A,

をみたすならば，

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n dm = \int_A f dm$$

が成立する．

問題 11.3 $0 < x < 1$ に対して，$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = (1+x)^{-1}$ を積分することによって，$1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots = \log 2$ が成り立つことを証明せよ．

例 11.4 A 上の可測関数列 $\{f_n\}$ と可積分関数 f が $f_n \to f$ a.e. をみたしていても，ルベーグの収束定理 (定理 11.1 及び系 11.2) の条件をみたしていなければ極限と積分の交換は成立しないことを，2 つの反例を挙げて確認する．

1. $A = (0, 1]$, $f = 0$,

$$f_n(x) = \begin{cases} n & (x \leq 1/n), \\ 0 & (x > 1/n). \end{cases}$$

2. $A = \mathbf{R}$, $f = 0$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & (x \in [n, n+1)), \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

これらどちらの場合も $\displaystyle\int_A f_n dm = 1 \neq 0 = \int_A f dm$ となり，極限と積分の交換は成立しない．

注意 11.5 極限と積分の交換定理をリーマン積分の枠組みで議論すると，以下のように与えられる: 有界閉区間 I 上の連続関数の列 $\{f_n\}$ が一様収束していれば，

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I \lim_{n\to\infty} f_n(x) dx \tag{11.4}$$

が成立する．

(11.4) の証明の概略を述べよう．まず，$\{g_n\}$ が g に I 上一様収束するとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N_0 \in \mathbf{N}$ が存在し，$n \geq N_0 \Rightarrow \sup_{x\in I} |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$ が成り立つときに言う．例えば，$I = [0, 1]$, $g_n(x) = x^n$ であるとき，$\{g_n\}$ は $g(x) = \mathbf{1}_{\{1\}}(x)$ に各点収束するが一様収束はしない．尚，連続関数列の一様

収束極限は連続関数であり，連続関数はリーマン積分可能であることに注意しよう．今，$\varepsilon > 0$ を任意に固定し，十分大きな n を取る．このとき，

$$\left| \int_I (f_n(x) - f(x))dx \right| \leq \int_I |f_n(x) - f(x)|dx \leq \varepsilon |I|$$

を得る．よって，(11.4) が成立する．

問題 11.6 $\{f_n\}$ を有界閉区間 I 上の (連続とは限らない) 関数列で，各 f_n はリーマン積分可能かつ有界であるとし，f に一様収束しているものとする．このとき，f もリーマン積分可能であることを示し，(11.4) が成立することを確認せよ．

11.2 ルベーグの収束定理の応用

ルベーグの収束定理から導かれる定理や命題を紹介する．

定理 11.7 (微分と積分の交換) $A \in \mathcal{M}$ とし，$f(t,x)$ を $(a,b) \times A$ 上で定義された関数で以下の条件をみたすものとする．

1. 各 $t \in (a,b)$ に対し $f(t,x)$ は $x \in A$ の関数として可積分．
2. 各 $x \in A$ に対し $f(t,x)$ は $t \in (a,b)$ の関数として偏微分可能．
3. A 上で定義された可積分関数 g が存在し，任意の $(t,x) \in (a,b) \times A$ に対して
$$|f_t(t,x)| \leq g(x)$$
が成立する．ただし，f_t は f の t に関する偏微分である．

このとき，$\int_A f(t,x)dm$ は $t \in (a,b)$ に関して微分可能で，

$$\frac{d}{dt} \int_A f(t,x)dm = \int_A f_t(t,x)dm \tag{11.5}$$

が成立する．

証明. $t \in (a,b)$ とする．$t+h \in (a,b)$ をみたすように $h \neq 0$ を取り，A 上の関数 g_h を

$$g_h(x) := \frac{f(t+h,x) - f(t,x)}{h}$$

と定義する．f は (a,b) 上微分可能なので，平均値の定理より，$\theta \in (t, t+h)$ (h が負ならば $\theta \in (t+h, t)$) が存在し，$f_t(\theta, x) = g_h(x)$ となる．よって，$|g_h(x)| = |f_t(\theta,x)| \leq g(x)$ が成立する．ゆえに，g_h に対してルベーグの優収束定理 (定理 11.1) を用いると以下が成立する:

$$\lim_{h \to 0} \int_A g_h dm = \int_A f_t(t,x)dm. \tag{11.6}$$

(11.6) の左辺は，h を右から 0 に近づけても左から近づけても，同じ極限 $\int_A f_t(t,x)dm$ に収束することを意味している．この点に注意すると，

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\int_A g_h dm &= \lim_{h\to 0}\int_A \frac{f(t+h,x)-f(t,x)}{h}dm \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\int_A f(t+h,x)dm - \int_A f(t,x)dm\right\} \\ &= \frac{d}{dt}\int_A f(t,x)dm\end{aligned}$$

となることから，$\int_A f(t,x)dm$ は $t\in(a,b)$ について微分可能であり，(11.5) が成立する． □

注意 11.8 (11.6) では，関数の族 $\{g_h\}$ に対して定理 11.1 を用いている．h は連続パラメーターなので，厳密な意味では定理 11.1 をそのまま用いることはできない．しかし，$h=\dfrac{1}{n}$ などとして $n\to\infty$ とすれば良いので，$\{g_h\}$ に対しても定理 11.1 を用いることができるのである．

定理 11.9 (ベッポ・レヴィ(Beppo-Levi) の項別積分定理) 可測関数列 $\{f_n\}$ が $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbf{R}}|f_n|dm<\infty$ をみたすとき，級数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ は可積分関数に概収束し，

$$\int_{\mathbf{R}}\sum_{n=1}^{\infty}f_n dm = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbf{R}}f_n dm$$

をみたす．

証明. 命題 10.3 より

$$\int_{\mathbf{R}}\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|dm = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbf{R}}|f_n|dm$$

が成立する．この右辺は有限なので，$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|$ は可積分である．よって，命題 9.5 より $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|<\infty$ a.e. となる．つまり，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ は a.e. で絶対収束している．各 $k\in\mathbf{N}$ に対して $g_k:=\sum_{n=1}^{k}f_n$ とおくと，$g_k\le\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|$ であり，$\lim_{k\to\infty}g_k=\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ a.e. であるから，ルベーグの優収束定理 (定理 11.1)

より

$$\int_{\mathbf{R}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n dm = \int_{\mathbf{R}} \lim_{k\to\infty} g_k dm = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{R}} g_k dm$$
$$= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{R}} \sum_{n=1}^{k} f_n dm = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \int_{\mathbf{R}} f_n dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbf{R}} f_n dm$$

が成立する．□

命題 11.10 f を可積分関数，$\{A_n\}$ を互いに素な可測集合の列とするとき，以下が成立する:

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} f dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f dm. \tag{11.7}$$

証明. 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して $f_n := f\mathbf{1}_{A_n}$ とおくと，定理 9.1 の 3 及び 5，f の可積分性より

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbf{R}} |f_n| dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f| dm = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_{A_n} |f| dm$$
$$= \lim_{N\to\infty} \int_{\bigcup_{n=1}^{N} A_n} |f| dm \leq \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbf{R}} |f| dm = \int_{\mathbf{R}} |f| dm < \infty$$

が成立する．従って，定理 11.9 より

$$\int_{\mathbf{R}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbf{R}} f_n dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f dm$$

となる．一方，

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} f dm = \int_{\mathbf{R}} \mathbf{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} f dm = \int_{\mathbf{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n} f dm = \int_{\mathbf{R}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n dm$$

が成立することより (11.7) を得る．□

第 12 週　リーマン積分とルベーグ積分の違い

12.1　リーマン積分とルベーグ積分

この節を通して f は $[a,b]$ 上定義された有界関数とする．ここでは，f に関する $[a,b]$ 上の積分において，ルベーグ積分がリーマン積分の拡張になっていることを示す．準備として以下の命題を証明する．

命題 12.1

$$\inf\left\{\int_{[a,b]}\psi dm\middle|\psi\text{は単関数},\psi\geq f\right\}=\sup\left\{\int_{[a,b]}\varphi dm\middle|\varphi\text{ は単関数},\varphi\leq f\right\} \tag{12.1}$$

が成立するとき，f は可測である．また，そのとき (12.1) の両辺の値は $\displaystyle\int_{[a,b]} f dm$ に等しい．

注意 12.2 証明は与えないが命題 12.1 の逆も成立する．つまり，f が可測ならば (12.1) が成立する．

命題 12.1 の証明.　関数 f は有界なので，十分大きな定数 $M>0$ を取れば $f+M$ は非負になる．よって，初めから f は非負であると仮定しても一般性を失わない．(12.1) の左辺及び右辺の値を Σ とする．このとき，単関数の列 $\{\varphi_n\}$ で，$\varphi_n\leq f$ かつ $\displaystyle\int_{[a,b]}\varphi_n dm\to\Sigma$ をみたすものが存在する．同様にして，単関数の列 $\{\psi_k\}$ で，$\psi_k\geq f$ かつ $\displaystyle\int_{[a,b]}\psi_k dm\to\Sigma$ をみたすものが存在する．ここで，各 $n,k\in\mathbf{N}$ に対して，$\tilde{\varphi}_n:=\max\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$, $\tilde{\psi}_k:=\min\{\psi_1,\ldots,\psi_k\}$ と定義すれば，$\{\tilde{\varphi}_n\}$ は非減少列となり，$\{\tilde{\psi}_k\}$ は非増大列となる．さらに，

$$\tilde{\varphi}_1\leq\tilde{\varphi}_2\leq\cdots\leq\tilde{\varphi}_n\leq\cdots\leq f\leq\cdots\leq\tilde{\psi}_k\leq\cdots\leq\tilde{\psi}_2\leq\tilde{\psi}_1$$

が成立することに注意する．ここで，$\varphi:=\lim_{n\to\infty}\tilde{\varphi}_n$, $\psi:=\lim_{k\to\infty}\tilde{\psi}_k$ とおくと，φ 及び ψ は可測で，$\varphi\leq f\leq\psi$ a.e. をみたす．今，

$$A:=\{x\in[a,b]|\psi(x)>\varphi(x)\}$$

とおく．もし $m(A)=0$ であれば，$f=\varphi=\psi$ a.e. となり，問題 7.10 の 4 より f の可測性が得られる．さらに，単調収束定理 (定理 10.1) より $\displaystyle\int_{[a,b]} f dm=\Sigma$ も成り立つ．

そこで $m(A)=0$ を示そう．$i\in\mathbf{N}$ に対して，

$$A_i:=\left\{x\in[a,b]|\psi(x)-\varphi(x)>\frac{1}{i}\right\}$$

とおくと，$\{A_i\}$ は非減少列で，$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ をみたす．任意の $n, i \in \mathbf{N}$ に対して，$\tilde{\psi}_n - \tilde{\varphi}_n \geq \psi - \varphi \geq \frac{1}{i}\mathbf{1}_{A_i}$ が成立するので，

$$\int_{[a,b]} (\tilde{\psi}_n - \tilde{\varphi}_n) dm \geq \int_{[a,b]} (\psi - \varphi) dm \geq \int_{[a,b]} \frac{1}{i}\mathbf{1}_{A_i} dm = \frac{1}{i} m(A_i)$$

を得る．$n \to \infty$ を取れば，(12.1) より左辺は 0 に収束する．従って，任意の $i \in \mathbf{N}$ に対して $m(A_i) = 0$ となる．よって，$m(A) = 0$ が成り立つ． □

ここでルベーグ積分がリーマン積分の拡張になっていることを証明しよう．

定理 12.3 f がリーマン積分可能であれば可測であり，リーマン積分とルベーグ積分の値は一致する．

証明. f はリーマン積分可能であるとする．まず，(12.1) が成立していることを示す．$[a,b]$ の分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ に対して，各部分区間 $[x_{i-1}, x_i]$ 上で $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ を取る関数を ψ_Δ とする．尚，Δ の分点 x_i における ψ_Δ の値は M_i でも M_{i+1} でもどちらでも良い．同様にして，各部分区間 $[x_{i-1}, x_i]$ 上で $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ を取る関数を φ_Δ とする．ψ_Δ 及び φ_Δ は単関数であり，$\psi_\Delta \geq f \geq \varphi_\Delta$ をみたす．さらに，$S_\Delta(f) = \int_{[a,b]} \psi_\Delta dm$ 及び $s_\Delta(f) = \int_{[a,b]} \varphi_\Delta dm$ が成り立つ．また，任意の分割 Δ に対して，

$$S_\Delta(f) \geq (12.1) \text{ の左辺} \geq (12.1) \text{ の右辺} \geq s_\Delta(f)$$

が成り立つ．f はリーマン積分可能なので，定理 1.5 より，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$ をみたす分割 Δ が存在する．以上より，(12.1) が成立し，命題 12.1 より f の可測性が得られ，積分値 $\int_{[a,b]} f dm$ は (12.1) に等しい．一方，リーマン積分 $\int_a^b f(x)dx$ の値は $S(f) = \inf_\Delta S_\Delta(f)$ 及び $s(f) = \sup_\Delta s_\Delta(f)$ に等しい．従って，$\int_{[a,b]} f dm = \int_a^b f(x)dx$ が成立する． □

12.2 広義積分

この節では広義積分について議論する[30)]．まず，

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx \tag{12.2}$$

[30)] この節の内容は [5] の第 1 章に基づいている．

をリーマン積分の枠組みで考察したい．リーマン積分は有界閉区間上の有界関数に対して定義されるので，(12.2) は通常のリーマン積分の枠では捉えることができない．まず，被積分関数が $x=0$ で定義できないことが問題となる．ただ，$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ なので，例えば，

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{\sin x}{x}dx$$

とすれば，少なくとも区間 $[0,1]$ 上では積分が定義できる．一方，積分区間を無限大に拡張することは可能であろうか? 一般には

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{\sin x}{x}dx$$

とすれば，有界でない区間でも積分が定義できる．ここで，部分積分より

$$\int_1^N \frac{\sin x}{x}dx = \Big[-\frac{\cos x}{x}\Big]_1^N - \int_1^N \frac{\cos x}{x^2}dx$$

となり，$\lim_{N\to\infty}\int_1^N \dfrac{1}{x^2}dx<\infty$ より，右辺の極限は収束することが分かる．このように，被積分関数が発散するなどして区間の端点で定義できない場合や，積分区間が有界でない場合に，極限操作により積分を定義することができる．このような積分を**広義積分**と呼ぶ．これは通常のリーマン積分とは全く異なる積分であることに注意されたい．実際，英語では improper integral(異常積分) と呼ぶ．

次に (12.2) をルベーグ積分で捉えるとどうなるであろうか? 被積分関数を f と書く．つまり，$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ である．このとき，(12.2) をルベーグ積分の定義に沿って記述すると，

$$\int_{(0,\infty)} f(x)dm = \int_{(0,\infty)} f^+(x)dm - \int_{(0,\infty)} f^-(x)dm$$

となり，右辺第 1 項を計算すると

$$\int_{(0,\infty)} f^+dm = \sum_{k=0}^\infty \int_{A_k} fdm \geq \sum_{k=0}^\infty \int_{A_k} \frac{\sin x}{(2k+1)\pi}dm = \infty$$

を得る．ただし，$A_k=(2k\pi,(2k+1)\pi)$, $k=0,1,\dots$ である．f^- に関する積分も同様なので f は積分確定な関数ではない．よって，リーマン積分の意味で広義積分可能であってもルベーグ積分は定義できないのである．この事実は，(12.2) をリーマン積分で計算することは級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(x)dx$ を計算していることに他ならないが，この級数が条件収束級数であることに起因しているのである．以下の定理はすぐに理解できるであろう．

定理 12.4 $f\geq 0$ とする．f が $\mathbf{R}$ 上で (リーマン積分の意味で) 広義積分可能ならば，ルベーグ積分の意味で可積分であり，その積分値は一致する．

ここで 2 次元の広義積分を考える．積分領域を D とすれば，D に収束する有界領域の増大列 $\{D_n\}$ に対して，その D_n 上の積分の極限として広義積分が定義される．このとき，極限は有界領域の増大列の取り方に依らないという条件が付くことに注意したい．例えば，

$$\int\int_{\mathbf{R}^2} \frac{\sin x}{x}\frac{\sin y}{y}dxdy$$

を考える．(12.2) の計算より有限値に収束しそうであるが，この積分は絶対収束しないので，$\{D_n\}$ の取り方次第では無限大に発散してしまう．従って，広義積分可能ではない．1 次元の広義積分は領域を単純に拡げた場合の極限として定義されるが，2 次元以上では領域の拡げ方を任意に取り，その極限として広義積分が定義される．つまり，1 次元の広義積分だけが特殊な積分なのである．

問題 12.5　1. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ は区間 $[0,1]$ 上で広義積分可能であることを示せ．

2. $[0,1]$ 上の関数の列

$$f_n(x) = \frac{n\sin x}{1+n^2\sqrt{x}}$$

に対し，$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} f_n dm$ を求めよ．

第 13 週　直積測度空間とフビニの定理

本章では，二重積分 (逐次積分と呼ぶべきか) が以下のように順序交換可能となるための条件について述べた定理である**フビニの定理**を紹介する:

$$\int_{E_1}\int_{E_2} f(x_1,x_2)d\mu_2 d\mu_1 = \int_{E_2}\int_{E_1} f(x_1,x_2)d\mu_1 d\mu_2.$$

ここで，μ_1, μ_2 は測度である．フビニの定理を述べるためには，まず 2 つの測度空間の直積について議論する必要がある．

13.1　直積測度空間

$(X_i,\mathcal{A}_i,\mu_i)$, $i=1,2$ を σ-有限測度空間とする．これら 2 つの測度空間の自然な拡張となるように，直積集合 $X_1\times X_2$ 上に測度空間 $(X_1\times X_2,\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2,\mu_1\times\mu_2)$ を定義したい．まず，$A_1\in\mathcal{A}_1$, $A_2\in\mathcal{A}_2$ に対して，直積集合 $A_1\times A_2$ を**長方形**と呼ぶ．このとき，測度 $\mu_1\times\mu_2$ が

$$\mu_1\times\mu_2(A_1\times A_2)=\mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \tag{13.1}$$

を満たしていることは，自然な要請であろう．従って，$X_1\times X_2$ 上の σ-加法族 $\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2$ は全ての長方形を含む必要があるが，長方形の全体

$$\mathcal{R}:=\{A_1\times A_2|A_1\in\mathcal{A}_1,A_2\in\mathcal{A}_2\}$$

は σ-加法族とは限らないので，$\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2$ は $\mathcal{R}$ を含む最小の σ-加法族 $\sigma(\mathcal{R})$ と定義する．そして，$\mu_1\times\mu_2$ を直積可測空間 $(X_1\times X_2,\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2)$ 上の測度で，条件 (13.1) を満たすものとして構成する．このとき，$(X_1\times X_2,\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2,\mu_1\times\mu_2)$ を**直積測度空間**と言う．以後，$X:=X_1\times X_2$, $\mathcal{A}:=\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2$, $\mu:=\mu_1\times\mu_2$ と記述する．ここでは，直積測度空間 μ の構成方法について解説する．

部分集合 $B\subset X$ を取る．このとき，任意の $x_2\in X_2$ に対して，

$$B_{x_2}:=\{x_1\in X_1|(x_1,x_2)\in B\}\subset X_1$$

と定義する．同様に，任意の $x_1\in X_1$ に対して，

$$B_{x_1}:=\{x_2\in X_2|(x_1,x_2)\in B\}\subset X_2$$

と定義する．これらを B の**切断**と言う．以下の命題が成立する．

命題 13.1 $B\in\mathcal{A}$ とすると，任意の $x_2\in X_2$ に対して $B_{x_2}\in\mathcal{A}_1$，任意の $x_1\in X_1$ に対して $B_{x_1}\in\mathcal{A}_2$ である．

証明.　概略だけ述べる．$\mathcal{G} := \{B \in \mathcal{A} | \forall x_2 \in X_2 \text{ に対して } B_{x_2} \in \mathcal{A}_1\}$ とする．このとき，$\mathcal{A} \supset \mathcal{G}$ であるから，$\mathcal{G}$ がすべての長方形を含む σ-加法族であることを示せば良い．まず，長方形 $A = A_1 \times A_2$ が $\mathcal{G}$ に属すことはすぐに分かる．また，$B \in \mathcal{G}$ ならば，$(X \backslash B)_{x_2} \in \mathcal{A}_1$ であり，$X \backslash B \in \mathcal{G}$ である．さらに，$B_1, B_2, \cdots \in \mathcal{G}$ ならば $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)_{x_2} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n)_{x_2}$ より，$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{G}$ となる．□

ここで，長方形 $A = A_1 \times A_2$ に対して，$\mu_1(A_{x_2}) = \mu_1(A_1)\mathbf{1}_{\{x_2 \in A_2\}}$ であるから，$x_2 \mapsto \mu_1(A_{x_2})$ は可測で，

$$\mu(A) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) = \int_{X_2} \mu_1(A_{x_2}) d\mu_2(x_2)$$

が成立する[31)]．そこで，測度 μ を

$$\mu(B) = \int_{X_2} \mu_1(B_{x_2}) d\mu_2(x_2), \quad B \in \mathcal{A} \tag{13.2}$$

により定義したい．この積分に意味を持たせるためには，以下の定理を紹介する．

定理 13.2 $\mu_i,\ i = 1, 2$ は有限であるとする．$B \in \mathcal{A}$ ならば，写像 $x_2 \mapsto \mu_1(B_{x_2})$ 及び $x_1 \mapsto \mu_2(B_{x_1})$ はそれぞれ $\mathcal{A}_2$ 及び $\mathcal{A}_1$ に関して可測で，

$$\int_{X_2} \mu_1(B_{x_2}) d\mu_2(x_2) = \int_{X_1} \mu_2(B_{x_1}) d\mu_1(x_1)$$

が成立する．

この定理を示すには**単調族定理**が必要となる．単調族定理はこれ自体重要な定理であるが，証明は省略する．定理を述べる前に，**単調族**の定義を与えておく．集合族 $\mathcal{G}$ が単調族であるとは，

$$B_1 \subset B_2 \subset \cdots \in \mathcal{G} \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{G} \text{ かつ } B_1 \supset B_2 \supset \cdots \in \mathcal{G} \Longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{G}$$

を満たすときに言う．また，集合族 $\mathcal{F}$ を含む最小の単調族を $M(\mathcal{F})$ と記す．

定理 13.3 (単調族定理) 有限加法族 $\mathcal{F}$ に対して，$M(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F})$.

定理 13.2 の証明.　概略を述べるに留める．まず，

$$\mathcal{G} := \left\{ B \in \mathcal{A} \;\middle|\; x_2 \mapsto \mu_1(B_{x_2}), x_1 \mapsto \mu_2(B_{x_1}) \text{ は可測，かつ，} \int_{X_2} \mu_1(B_{x_2}) d\mu_2(x_2) = \int_{X_1} \mu_2(B_{x_1}) d\mu_1(x_1) \right\} \subset \mathcal{A}$$

[31)] これまで μ_2 と記述していたものをここでは $d\mu_2(x_2)$ とした．

とする．最初に，$\mathcal{G}$ が長方形の全体 $\mathcal{R}$ を含むことを示す．次に，互いに素な長方形の有限個の和集合の全体を $\mathcal{C}$ とし，$\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ を示す．なお，$\mathcal{C}$ は有限加法族である．さらに $\mathcal{G}$ が単調族であることを示す．これより，$M(\mathcal{C}) \subset \mathcal{G}$ が得られる.. ここで，$\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{R}) = \sigma(\mathcal{C})$ であるから，単調族定理より $\mathcal{A} = M(\mathcal{C})$ となる．よって，$\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$ となり定理 13.2 は成立する． □

ここで，2 次元ルベーグ測度空間を考えよう．これは $\mathbf{R}^2$ 上の測度空間である．まず，1 次元における区間に相当するものとして長方形を考える．x 軸方向は a から b まで、y 軸方向は c から d までを範囲とする長方形を，$[a,b] \times [c,d]$ と書く．つまり，長方形は 2 つの区間の直積で表現される．

注意 13.4　1. 長方形を考える際，区間として開区間や半開区間を使っても良い．

2. 3 次元以上の空間に対しても，区間の直積を用いて長方形 (3 次元の場合なら直方体と言うべきか) を定義することができる．

ここで，1 次元のボレル集合族 $\mathcal{B}$ は，すべての区間を含む最小の σ-加法族であったことを思い出そう．これを 2 次元に拡張し，すべての長方形を含む最小の σ-加法族を **2 次元ボレル集合族**と呼び，$\mathcal{B}^2$ と書くことにする．尚，$\mathcal{B}^2 = \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ が成立する．この事実を証明することはそれほど簡単ではない．詳しくは [5] の 3 章を見よ．次に，可測空間 $(\mathbf{R}^2, \mathcal{B}^2)$ 上の測度 m_B^2 が **2 次元ボレル測度**であるとは，任意の 2 つの (1 次元の) 区間 I_1, $I_2 \subset \mathbf{R}$ に対して，

$$m_B^2(I_1 \times I_2) = m_B(I_1) m_B(I_2)$$

をみたすときに言う．ただし，m_B は 1 次元ボレル測度である．尚，上記の条件をみたす測度が一意に存在していることは保証されている．また，2 次元ボレル測度空間 $(\mathbf{R}^2, \mathcal{B}^2, m_B^2)$ は 1 次元ボレル測度空間の直積である．さらに，2 次元ボレル測度空間 $(\mathbf{R}^2, \mathcal{B}^2, m_B^2)$ を完備化したものを $(\mathbf{R}^2, \mathcal{M}^2, m^2)$ と書き，**2 次元ルベーグ測度空間**と呼ぶ.

13.2　フビニの定理

本節では，一般の σ-有限測度空間 $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ におけるフビニの定理を紹介する．実は，多くの場合において重積分の順序交換は可能である．つまり，重積分の順序交換を行う際には，極限と積分の交換 (ルベーグの収束定理) ほどには神経質になる必要はない．手始めに以下の定理を紹介する．

定理 13.5 $f : X \to \mathbf{R}$ を非負 $\mathcal{A}$-可測関数とする．このとき，以下が成立する:

$$\begin{aligned}\int_X f(x_1,x_2)d(\mu) &= \int_{X_1}\left(\int_{X_2} f(x_1,x_2)d\mu_2\right)d\mu_1 \\ &= \int_{X_2}\left(\int_{X_1} f(x_1,x_2)d\mu_1\right)d\mu_2. \qquad (13.3)\end{aligned}$$

定理の証明について簡単に触れる．各 $x_1 \in X_1$ に対して，写像 $X_2 \ni x_2 \longmapsto f(x_1,x_2)$ は $\mathcal{A}_2$-可測関数となる．これを f の**切断**と呼ぶ．同様にして，各 $x_2 \in X_2$ に対する切断 $X_1 \ni x_1 \longmapsto f(x_1,x_2)$ も $\mathcal{A}_1$-可測関数になる．さらに，以下の定理と単調族定理より定理 14.2 は示される:

定理 13.6 非負 $\mathcal{A}$-可測関数 f の切断は可測であり，

$$x_1 \longmapsto \int_{X_2} f(x_1,x_2)d\mu_2, \quad x_2 \longmapsto \int_{X_1} f(x_1,x_2)d\mu_1$$

も可測関数である．

そして，f が可積分の場合でも (13.3) が成立することが示される:

系 13.7 (フビニの定理) $f \in L^1(X)$ であるとき，(13.3) が成立する．

問題 13.8 $[0,1]\times[0,1]$ 上の関数

$$f(x,y) = \begin{cases} x^{-2} & \text{if } 0<y<x<1, \\ -y^{-2} & \text{if } 0<x<y<1, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

に対して，$\displaystyle\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy$ と $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dydx$ を計算せよ．

問題 13.9 $[0,1]\times[0,1]$ 上の関数

$$f(x,y) = \begin{cases} n & \text{if } x>y \text{ かつ } x \in \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right], \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

に対して，$\displaystyle\int_{[0,1]\times[0,1]} f dm^2 = \infty$ となることを証明せよ．

第 14 週　ラドン・ニコディムの定理と条件付き期待値

この章ではとりわけ確率論において重要な役割を果たす**ラドン・ニコディムの定理**を紹介する．特に，条件付き期待値と測度変換を考える際に必要となる．そこで，ここでは測度空間を確率空間に限定して議論を行う．$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率空間とする．つまり，$\mathbb{P}(\Omega) = 1$ をみたす測度空間とする．さらに，X を非負確率変数[32]で $\mathbb{E}[X] = 1$ をみたす[33]とき，任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して，

$$\mathbb{Q}_X(A) := \mathbb{E}[X\mathbf{1}_A] \left(= \int_A X d\mathbb{P} \right)$$

により定義される集合関数 $\mathbb{Q}_X : \mathcal{F} \to \mathbf{R}$ は，可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度となる．ここで，任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して $\mathbb{P}(A) = 0$ ならば $\mathbb{Q}_X(A) = 0$ となることに注意したい．このとき，$\mathbb{Q}_X$ は $\mathbb{P}$ に対して**絶対連続**であると言い，$\mathbb{Q}_X \ll \mathbb{P}$ と書く．

注意 14.1 可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の 2 つの測度 $\mathbb{P}_1$ と $\mathbb{P}_2$ が**互いに絶対連続**であるとき，つまり，任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して $\mathbb{P}_1(A) = 0 \iff \mathbb{P}_2(A) = 0$ であるとき，$\mathbb{P}_1$ と $\mathbb{P}_2$ は**同値**であると言い，$\mathbb{P}_1 \sim \mathbb{P}_2$ と書く．

以上より，期待値が 1 になる非負確率変数が与えられれば，絶対連続な確率測度を構成できることが分かった．一方,「絶対連続な確率測度 $\mathbb{Q}$ が与えられたとき，$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}[X\mathbf{1}_A], \forall A \in \mathcal{F}$ をみたす非負確率変数 X が存在するのか?」という問題が生じる．その答えは YES であり，その存在を保証しているのがラドン・ニコディムの定理である．

定理 14.2 (ラドン・ニコディムの定理) $\mathbb{Q}$ を $\mathbb{P}$ に対して絶対連続な $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度とする．このとき，任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}[X\mathbf{1}_A]$ となる非負確率変数 X が存在する．さらに，Y もこのような非負確率変数であるならば，$X = Y$ $\mathbb{P}$-a.e. をみたす[34]．この意味で X は一意である．

注意 14.3

1. 上記の定理は一般の σ-有限測度空間でも成立する．
2. 上記の定理における X を**ラドン・ニコディム導関数**と呼び，$\dfrac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ と書く．
3. $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$ であるとき，$\dfrac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} > 0$ a.e. である．

---

[32] この節と次の節では，確率論の議論にも慣れてもらうため，あえて確率論の用語を用いる．そのため，可測関数ではなく確率変数と呼び，ルベーグ積分も期待値を用いて表す．

[33] $\mathbb{E}[X]$ は X の期待値であり，その定義は $\mathbb{E}[X] := \int_\Omega X d\mathbb{P}$ である．

[34] わざわざ「$\mathbb{P}$-a.e.」と書いたのは，ここでは $\mathbb{P}$ と $\mathbb{Q}$ の 2 つの測度が登場するからである．

14.1 条件付き期待値

$\mathcal{G}$ を Ω 上の σ-加法族で $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ をみたすものとする．これは金融資産価格モデルのように時間発展する確率モデルにおいて，$\mathcal{G}$ をある時刻 t までに得られた情報と見なし，$\mathcal{F}$ は将来時刻 $T(> t)$ までに得られた情報とみなすことができる．今、$\mathcal{F}$-可測の可積分確率変数 X を考える．典型例として時刻 T における資産価格があげられる．時刻 t における X の期待値を考えたい．これは $\mathcal{G}$ の情報を得て決まる期待値なので，**条件付き期待値**と呼び，$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ と記述する．期待値とは言うが，これは $\mathcal{G}$-可測確率変数であることに注意されたい．

ここで $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ の正確な定義を述べよう．任意の $G \in \mathcal{G}$ に対して

$$\mathbb{E}[Y\mathbf{1}_G] = \mathbb{E}[X\mathbf{1}_G],$$

つまり $\displaystyle\int_G Y dP = \int_G X dP$ をみたす確率変数 Y を，X の $\mathcal{G}$ に関する条件付き期待値と呼び，$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ と書く．これが定義として機能するためには，このような Y が一意に存在することが保証されていなければならない．今，集合関数 $\nu : \mathcal{F} \to \mathbf{R}$ を

$$\nu(F) := \mathbb{E}[X\mathbf{1}_F], \quad F \in \mathcal{F},$$

と定義する．X は非負とは限らないので，これは測度にはならないが，$\nu(\emptyset) = 0$ であり，かつ σ-加法性をみたす．このような集合関数を**符号付測度**と言う．ラドン・ニコディムの定理 (定理 14.2) は符号付測度に対しても成立することに注意しよう．この ν の定義域を $\mathcal{G}$ に制限すると，これは可測空間 $(\Omega, \mathcal{G})$ 上の符号付測度になる．そこで定理 14.2 より，任意の $G \in \mathcal{G}$ に対して

$$\nu(G) = \mathbb{E}[Y\mathbf{1}_G]$$

をみたす $\mathcal{G}$-可測確率変数 Y が一意に存在する．

問題 14.4 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし，X を $\mathcal{F}$-可測な可積分確率変数，$\mathcal{G}$ を Ω 上の σ-集合族で $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ を満たすものとする．このとき，以下を証明せよ．

1. 任意の実数 $a \in \mathbf{R}$ に対して，$E[aX|\mathcal{G}] = aE[X|\mathcal{G}]$ が成立する．
2. $X \geq 0$ ならば $E[X|\mathcal{G}] \geq 0$ が成立する．
3. X が $\mathcal{G}$-可測ならば $E[X|\mathcal{G}] = X$ が成立する．

補遺 A　補足事項

集合の上極限と下極限:　　集合列 $A_1, A_2, A_3, \ldots$ に対して，

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \qquad \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

と定義し，それぞれ**上極限集合**, **下極限集合**という．$x \in \limsup_{n\to\infty} A_n$ ならば，無限に多くの n に対して $x \in A_n$ であり，$x \in \liminf_{n\to\infty} A_n$ ならば，ある自然数 n_0 が存在し，任意の $n \geq n_0$ に対して $x \in A_n$ となる，つまり，有限個の n を除いて $x \in A_n$ となる．さらに，$\limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n$ であるとき，これを**極限集合**といい，それを $\lim_{n\to\infty} A_n$ と表す．集合列が $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ であるときは，$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ であり，集合列が $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ であるときは，$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ である．

写像:　　集合 A の元に対して集合 B の元を一つずつ対応させる規則 f を集合 A から集合 B への**写像**または**関数**といい，$f : A \to B$ と書く．A を f の**定義域**といい，$f(A) = \{f(x)|x \in A\}$ を**値域**という．写像 $f : A \to B$ と B の部分集合 B' を考える．このとき，

$$f^{-1}(B') = \{x \in A | f(x) \in B'\}$$

を f による B' の**逆像**という．以下の命題を証明なしで紹介する．

命題 A.1　A_1, A_2 と B_1, B_2 をそれぞれ A と B の部分集合とせよ．

1. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
2. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
3. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
4. $f(f^{-1}(B_1)) \subset B_1$.

任意の $y \in f(A)$ に対して，$x \in A$ が一意的に定まり $y = f(x)$ であるとき，つまり $f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$ であるとき，f を**単射**という．また，$B = f(A)$ であるとき，f を**全射**または**上への写像**という．f が単射かつ全射であるとき**全単射**という．f が単射であるとき，写像 $f^{-1} : f(A) \to A$ で，(1) $x \in A$ に対して $f^{-1}(f(x)) = x$，(2) $y \in f(A)$ に対して $f(f^{-1}(y)) = y$，を満たすものが存在する．この f^{-1} を f の**逆写像**という．逆像と逆写像の違いに注意せよ．

有限集合と無限集合:　自然数の全体を $\mathbf{N}$，有理数の全体を $\mathbf{Q}$，実数の全体を $\mathbf{R}$，複素数の全体を $\mathbf{C}$ と記述する．

二つの集合 A, B の間に全単射写像が存在するとき，A と B は**対等**であるといい，$A \sim B$ と書く．このとき A と B は同じ**濃度**を持つという．A の濃度を $|A|$ と書く．よって，$A \sim B$ であることと $|A| = |B|$ は同値である．大ざっぱにいえば，濃度とは集合に含まれる元の個数である．例えば，空集合の濃度は 0 である．つまり $|\emptyset| = 0$ である．集合 A が有限個の元しか含まないとき，つまり**有限集合**であるとき，ある自然数 $n \in \mathbf{N}$ が存在して $|A| = n$ である．このとき，明らかに $A \sim \{1, 2, \ldots, n\}$ である．

有限集合でない集合を**無限集合**という．集合 A が $A \sim \mathbf{N}$ であるとき，A を**可算**という．集合が有限または可算であるとき，**高々可算**という．なお，$\mathbf{Z}$ や $\mathbf{N}^2$ は可算集合であるが，$\mathbf{R}$ は可算でない無限集合である．

開集合と閉集合:　$\mathbf{R}$ の部分集合 A を考える．点 $x \in \mathbf{R}$ が A の**内点**であるとは，x を含み A に含まれる開区間 S_x が存在するときに言う．つまり，

$$x \in \mathbf{R} \text{ が } A \text{ の内点} \iff x \in S_x \subset A \text{ なる開区間 } S_x \text{ が存在する},$$

である．実は，x が A の内点であるとき，S_x として x を中心とする開区間を取れる．つまり，十分小さな正数 $\varepsilon > 0$ が存在し，$x \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$ となる．開区間 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ を x の **ε-近傍**と呼び，$N(x, \varepsilon)$ と書く．$A \subset \mathbf{R}$ が空集合であるか，任意の $x \in A$ が A の内点であるとき，A を $\mathbf{R}$ 上の**開集合**という．$\mathbf{R}$ 自身，$\emptyset$, 任意の開区間，(x, ∞) や $(-\infty, x)$ などの無限開区間は開集合である．一方，開集合でない例として，閉区間，半開区間，一点集合 $\{x\}$, $[x, \infty)$ や $(-\infty, x]$ などの無限閉区間，$\{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$ などが挙げられる．開集合の基本性質として以下の命題を紹介する．

命題 A.2　1. 任意個 (非可算の場合も含む) の開集合の和集合は再び開集合である．

2. 有限個の開集合の共通部分は再び開集合である．

開集合の補集合を**閉集合**という．従って，$\emptyset$ と $\mathbf{R}$ は，$\mathbf{R}$ 上の開集合でもあり，閉集合でもある．また，任意の閉区間，無限閉区間，一点集合も $\mathbf{R}$ 上の閉集合である．半開区間は開でも閉でもない．さらに，命題 A.2 とド・モルガンの法則から以下が成り立つ:

1. 任意個の閉集合の共通部分は再び閉集合である．

2. 有限個の閉集合の和集合は再び閉集合である．

上限と下限:　$\mathbf{R}$ の部分集合 A が**上に有界**であるとは，ある $y \in \mathbf{R}$ が存在し，任意の $x \in A$ に対して $x \leq y$ が成り立つときに言う．なお，このような条件を満たす y を A の**上界**と言う．同様に，ある $y \in \mathbf{R}$ が存在し，任意の $x \in A$ に対して，$x \geq y$ が成り立つとき，A は**下に有界**であると言い，このような y を A の**下界**と言う．また，上にも下にも有界であるとき，単に**有界**という．

$y \in \mathbf{R}$ が集合 $A \subset \mathbf{R}$ の**最大値**であるとは，$y \in A$ であり，y は A の上界であるときに言う．なお，最大値は A に属する実数で最大となるものであり，$\max A$ と記述する．同様に，$y \in \mathbf{R}$ が $y \in A$ かつ A の下界であるとき，集合 $A \subset \mathbf{R}$ の**最小値**であると言い，$\min A$ と記述する．例えば，$A = [0,1]$ とすると $\max A = 1$，$\min A = 0$ であるが，$A = (0,1)$ とすると最大値も最小値も存在しない．そこで，最大値及び最小値の概念を少し拡張する．$y \in \mathbf{R}$ が以下の 2 条件を満たすとき，集合 $A \subset \mathbf{R}$ の**上限**であると言う:

1. 任意の $x \in A$ に対して，$y \geq x$,
2. $z < y$ ならば，$z < x$ となる $x \in A$ が存在する．

この上限を $\sup A$ と表す．同様に，$y \in \mathbf{R}$ が以下の 2 条件を満たすとき，集合 $A \subset \mathbf{R}$ の**下限**であると言い，$\inf A$ と記述する:

1. 任意の $x \in A$ に対して，$y \leq x$,
2. $z > y$ ならば，$z > x$ となる $x \in A$ が存在する．

例えば，$A = (0,1)$ とすると，$\sup A = 1$，$\inf A = 0$ となる．また，$A = \{1, 1/2, 1/3, \dots\}$ としても $\sup A = 1$，$\inf A = 0$ が成立する．このように

上に有界な集合は必ず上限を持つ

ことが予想される．これは**実数の連続性**と呼ばれる公理である．すなわち，実数の定義の一部であるため，証明すべき命題ではない．なお，実数の連続性と同値な条件がいくつか知られている．

実数列の収束:

定義 A.3 実数列 $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ がある実数 y に**収束**するとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある番号 $N \in \mathbf{N}$ が存在し，$n \geq N$ ならば $|x_n - y| < \varepsilon$ が成り立つときに言う．このとき，$x_n \to y (n \to \infty)$ などと書き，y を $\{x_n\}$ の**極限**という．

注意 A.4 (ε-δ 論法, ε-N 論法) 上記の定義文のように「〜が存在し」や「任意の〜に対して」を含む命題が度々現れるが，日本語として不自然であることが多く，分かりにくい．例えば，定義 A.3 を

任意の $\varepsilon > 0$ に対して,「$n \geq N$ ならば $|x_n - y| < \varepsilon$」
となる $N \in \mathbf{N}$ が存在する

と書き換えると，自然な日本語になり,「N が存在する」ことが定義の主張であることが分かる．では，なぜわざわざ不自然な文章で記述するのか? それは，自然な語順に並び換えると，N が自然数であることを述べる前に N が登場してしまうため，数学的に正しくない文章になってしまうからである．従って,「自然数 N が存在し」と書いてから，N がどんな自然数であるかを説明するのである．一方，定義 A.3 を英語で記述してみると

$$\text{For any } \varepsilon > 0, \text{ there exists an } N \in \mathbf{N} \text{ such that, for any } n \geq N, |x_n - y| < \varepsilon \tag{A.1}$$

となる．これは定義 A.3 と同じ語順である．日本語の場合,「such that」以下の部分を先に訳すので，不自然な語順になってしまう．このような命題が現れたときは，英語に訳してみると分かりやすい場合が多い．また，(A.1) を論理式で書くと，

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}; \forall n \geq N, |x_n - y| < \varepsilon$$

となるが，これは英文そのままであることが分かる．このような記法を用いると否定命題を作りやすいというメリットがある．

ここで実数列の収束について，2 つの定理を紹介する．

定理 A.5 有界単調実数列は収束する．

定理 A.6 (ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理) 有界な実数列は収束部分列を含む．

コーシー列: 実数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が**コーシー列**であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し，$n, m \geq N$ ならば $|x_n - x_m| < \varepsilon$ であるときにいう．以下の命題が成立する．

命題 A.7 実数列に関して，以下が成立する:

1. 収束列はコーシー列である．
2. コーシー列は有界列である．
3. コーシー列の部分列が y に収束すれば，コーシー列自身も y に収束する．
4. コーシー列は収束列である．

実数列の上極限と下極限: 実数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ に対して，

$$\limsup_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k, \qquad \liminf_{n\to\infty} x_n; = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k$$

と定義し，それぞれ$\{x_n\}$の**上極限**, **下極限**という．ここで，$x_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$となる点列$\{x_n\}$を考える．この点列は極限を持たないが，偶数番目だけを取る部分列は1に，奇数番目だけを取る部分列は-1に収束する．このように，部分列の取り方によって極限の値が変わるとき，上極限はそれらの最大値であり，下極限は最小値となる．従って，上記の点列の上極限は1，下極限は-1となる．なお，極限と異なり上極限と下極限は必ず存在するため，極限の存在が不明である場合に，極限の代わりに用いられることがある．また，上極限と下極限が一致するとき，つまり，$\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n$であるとき，実数列$\{x_n\}$は極限を持ち，極限の値は上極限 (または下極限) に等しい．

補遺 B　過去の試験問題

B.1　2021 年度

講義中に紹介した命題や定理は証明せずに用いても良い．
途中計算も略さず記述すること．

1. (15 × 2 = 30 点) X を 2 つ以上の要素を含む集合とし，任意の $A \subset X$ に対して，
$$\mu^*(A) = \begin{cases} 1 & \text{if } A \neq \emptyset, \\ 0 & \text{if } A = \emptyset, \end{cases}$$
として μ^* を定義するとき，μ^* は X 上のカラテオドリ外測度であることを示せ．また，この μ^* から導かれるカラテオドリ可測集合を全て求めよ．

2. (15 点) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ を測度空間，$A \in \mathcal{A}$ とする．このとき，$\mathbf{1}_A$ は可測関数であることを証明せよ．

3. (15 点) $f(x) = x$ とする．$\displaystyle\int_{[0,1)} f dm$ の値をルベーグ積分の定義に沿って計算せよ．但し，m はルベーグ測度である．

4. (15 点) g をルベーグ測度空間 $(\mathbf{R}, \mathcal{M}, m)$ 上の可積分関数とする．このとき，$g \geq f_n$, $n = 1, 2, \ldots$ を満たす可測関数列 $\{f_n\}$ に対して
$$\int_{\mathbf{R}} \limsup_{n\to\infty} f_n dm \geq \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} f_n dm$$
が成立することを証明せよ．

5. (15 点) 以下の (a), (b) から一題を選択し解答せよ．

   (a) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率空間，$\mathcal{G}$ を Ω 上の σ-加法族で $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ を満たすものとする．可積分確率変数 X が $X \geq 0$ を満たすとき $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \geq 0$ が成立することを示せ．

   (b) $0 \leq r < 1$ に対して，$\displaystyle\int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} r^n(\cos(nx) + 1)dx$ の値を求めよ．

B.2　2023 年度

講義中に紹介した命題や定理は証明せずに用いても良い．
途中計算も略さず記述すること．
以下，$(\mathbf{R}, \mathcal{M}, m)$ を 1 次元ルベーグ測度空間とする．

1. (10 点) m^* を $\mathbf{R}$ 上のルベーグ外測度とする．このとき，$m^*([1, \infty))$ の値を求めよ．ただし，講義ノート定理 3.3 の 3 は，有界区間 I に対してのみ示されている．

2. (10 点) 集合 $X = \{a, b, c\}$ 上の σ-加法族を 3 つ挙げよ.

3. (15 点) $\mathbf{R}$ の部分集合族 $\mathcal{G}$ が以下の条件をみたすとき，クラス G であるという: 「$A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{G}$ が非減少 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ または非増加 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$ であるとき，$\lim_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{G}$. 」
このとき，$\mathbf{R}$ 上の任意の σ-加法族はクラス G であることを証明せよ.

4. (15 点) X を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の $\mathbf{R}$-値可測関数 (確率変数) とする. 任意の $A \in \mathcal{B}$ に対して，$\mu(A) := \mathbb{P}(X^{-1}(A))$ と定義するとき，μ は可測空間 $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ 上の確率測度であることを証明せよ. ただし，$\mathcal{B}$ はボレル集合族である.

5. (10 点) f と g を 1 次元ルベーグ測度空間の可積分関数とする. このとき，$f \vee g$ も可積分であることを示せ.

6. (15 点) $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{M}$ に対して,

$$\int_{\mathbf{R}} \mathbf{1}_{\liminf_{n\to\infty} A_n} dm \leq \liminf_{n\to\infty} m(A_n)$$

であることを証明せよ. なお，$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ である.

7. (15 点) $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-3x} dx$ の値を求めよ.
ヒント: 任意の $n \in \mathbf{N}$ と $x > 0$ に対して，$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$.

索 引

a.e., 29

一様連続, 4
ε-N 論法, 61
ε-近傍, 60
ε-δ 論法, 61
上に有界, 61
上への写像, 59
エゴロフの定理, 32
開集合, 60
下界, 61
下極限, 63
下極限集合, 59
確率空間, 22
確率測度, 22
確率変数, 6
下限, 61
可算, 60
下積分, 2
可積分, 38
(μ^*-) 可測, 23
($\mathcal{A}$-) 可測 (関数), 28
可測, 6, 15
可測 (関数), 28
可測関数, 6, 28
可測空間, 16, 22
カラテオドリ可測, 15
カラテオドリ外測度, 11
カラテオドリによる可測性, 15
関数, 59
完全加法族, 16
カントール集合, 8
完備, 25
完備化, 26
概収束, 32
期待値, 6
極限, 61
極限集合, 59
逆写像, 59
逆像, 59
広義積分, 51
(ベッポ・レヴィの) 項別積分定理, 47
(正項級数の) 項別積分定理, 42
コーシー列, 62
最小値, 61
最大値, 61
σ-加法性, 14
σ-加法族, 16, 22
σ-集合体, 16
σ-集合代数, 16
σ-有限, 22
σ-劣加法性 (ルベーグ外測度), 9
σ-劣加法性 (ルベーグ測度), 25
下に有界, 61
写像, 59
収束, 61
振動量, 12
実数の連続性, 61
上界, 61
上極限, 63
上極限集合, 59
条件付き期待値, 58
上限, 61
上積分, 2
ジョルダン可測, 21
ジョルダン測度, 21
積分確定な関数, 39
切断 (関数), 56
切断 (集合), 53
絶対連続, 57
全射, 59
全単射, 59
測度, 6, 22
測度空間, 22

測度の連続性, 24
対等, 60
高々可算, 60
互いに絶対連続, 57
互いに素, 6
単関数, 33
単射, 59
単調収束定理, 41
単調性 (ルベーグ外測度), 9
単調族, 54
単調族定理, 54
ダルブーの定理, 2
値域, 59
チェビシェフの不等式, 39
長方形, 53
直積測度空間, 53
定義域, 59
定積分, 1, 2
等測包, 20
同値, 57
内点, 60
長さ, 5
2 次元ボレル集合族, 55
2 次元ボレル測度, 55
2 次元ルベーグ測度空間, 55
濃度, 60
幅, 1
非可測集合, 21
ファトゥの補題, 43
符号付測度, 58
フビニの定理, 53, 56
分割, 1
平行移動不変性 (ルベーグ外測度), 9
閉集合, 60
ホップの拡張定理, 23
殆ど至るところ, 29
ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理, 62
ボレル可測関数, 28
ボレル関数, 28
ボレル集合, 27
ボレル集合族, 27
無限集合, 60
有界, 61
有限可測分割, 33
有限加法性, 21
有限加法族, 21
有限加法的測度, 21
有限加法的測度空間, 21
有限集合, 60
有限測度, 22
有限測度空間, 22
ラドン・ニコディム導関数, 57
ラドン・ニコディムの定理, 57
リーマン積分可能, 1, 4
リーマン和, 1
ルベーグ可測, 14
ルベーグ可測関数, 28
ルベーグ外測度, 9
ルベーグ・スティルチェス外測度, 11
(一般の可測関数に対する) ルベーグ積分, 38
(単関数に対する) ルベーグ積分, 33
(非負関数に対する) ルベーグ積分, 36
ルベーグ測度, 21
ルベーグ測度空間, 21
ルベーグ測度の正則性定理, 22
ルベーグ内測度, 14
ルベーグの有界収束定理, 45
ルベーグの優収束定理, 44
ルージンの定理, 32
零集合, 7
零部分集合, 26