2024 年度

ファイナンス論 a/b 講義ノート

新井 拓児 (慶應義塾大学経済学部)

2024 年 2 月 5 日: 初版

この講義ノートは，2024 年度に開講される慶應義塾大学経済学部/経済学研究科設置科目「ファイナンス論 a/b」のための資料であり，それ以外の目的で使用することを禁じる．また，無断で転載，複写，配布することを禁止する．

© 2024 新井拓児

まえがき

これは慶應義塾大学経済学部及び経済学研究科設置科目「ファイナンス論 a/b」の講義ノートである．春秋合わせて 28 回分を収めている．講義は基本的にこの講義ノートに沿って進められる．

ファイナンス論は**企業金融論**[1)](corporate finance) と**投資の理論**[2)](investment theory) に大別されるが，本講義では投資の理論に焦点を当て，その主要トピックについて基礎から発展的な内容まで幅広く学ぶ．なお，投資の理論とは資産の価格付けや管理について個人投資家や金融機関の立場から議論する学問分野である．**(現代) ポートフォリオ理論** (modern portfolio theory) と**オプション価格付け理論** (option pricing theory) がその 2 大トピックであり，さらに効率的市場仮説，リスク管理，信用リスクなどのトピックも含む．また，高度な数学を用いてファイナンスの理論的側面を研究する分野を**数理ファイナンス** (mathematical finance)，金融実務への応用を念頭に，統計学や計算機などを駆使してファイナンスの諸問題に取り組む分野を**金融工学** (financial engineering) という．本講義は数理ファイナンスの入門コースでもあり，ファイナンスの数学的側面を中心に議論する．

講義内容について説明する．まず，第 1 章では，金利や現在価値などファイナンス論[3)]を学ぶ際に必要となる概念を紹介する．また，ファイナンス論に現れる金融市場モデルについて，やや詳しく説明する．続く第 2 章では，オプション価格付け理論において最も単純なモデルである 1 期間 2 項モデルを紹介し，基礎的な用語や概念の習得を目指す．第 3 章で 1 期間モデルを多期間へ拡張した後，多期間モデルの極限として代表的な連続時間型モデルである Black-Scholes モデルを第 4 章において導出する．ここでは確率論に関する高度な知識が必要となるが，これらについても詳しく論じる．また，Black-Scholes モデルに関するやや発展的な内容についても触れる．その後はオプション価格付け理論から離れ，第 5 章でポートフォリオ理論，第 6 章でリスク管理の基礎について学ぶ．

本講義を履修するにあたり，特に前提条件は置かない．例えば，オプション

[1)] 企業金融論は米国のビジネススクールにその起源を持ち，企業の資金調達，投資判断や財務管理などについて，一企業の立場から論じる学問分野である．経済学部では寄附講座「企業金融論」が開講されている．

[2)] 証券市場論，または，証券投資論などということもある．

[3)] 以下この講義ノートを通して,「ファイナンス論」と言った場合は，上述の「投資の理論」を指す．

価格付け理論やポートフォリオ理論は日吉キャンパスで開講されている「ファイナンス数学」でも扱っているが,「ファイナンス数学」が履修済みであることを前提とはしない[4]．本講義ではかなり高度な数学を扱うが，微分積分，数理統計学の基礎が分かっていれば理解できるように説明する．ただし，確率論についてより深く理解したい場合は,「解析学 IIa」や「数理経済学特論 IIa/b［確率論］」を履修することを強く勧める．また，経済学部には「金融論」という講義もあるが，これは主にマクロ経済学的な視点により，銀行の役割や金融政策等について議論する経済学の一分野であり[5]，本講義の目的とはかなり異なる[6]．

本講義が皆さんの今後の学習や研究に少しでも資するのであれば，それが私にとって最大の喜びである．

[4] ただし，本講義では「ファイナンス数学」では扱っていない発展的な内容も含んでいる．

[5] もちろんファイナンスも経済学の一分野であるが，その習得にはミクロ経済学やマクロ経済学の基礎知識を必要としない．実際，ここだけの話だが，私は経済学を学んだことはない．

[6] もちろん，一部重なる部分もあるが．

講義ノートの使い方

- できる限り数学書の体裁に近い形で著わしてある．つまり，重要な結論は「定理」または「命題」としてまとめ，可能な範囲で証明を付けている．
- 確率論に関する事項は巻末の補遺 A にまとめてある．この内容についても説明を加えつつ講義を進める予定である．
- このノートには「問」が散りばめられているので，できる限り自力で解いてもらいたい．
- 補遺 A を含むすべての章の終わりに章末問題を用意した．これは期末試験の準備に役立つであろう．講義では時間の許す限り章末問題の解説を行うつもりであるが，紹介できなかった分については各自で取り組んでもらいたい．なお，補遺 B に章末問題の解答を載せておいた．問題番号をクリックすると解答にジャンプするよう設定してある．
- 重要な用語が初めて登場するときは，太字で表記し英訳を付けている．また，最重要と思われる記述も太字にしてある．
- できる限りアルファベット表記は避けているが，定訳のない用語の中には英語のまま用いているものもある．ただし，人名はアルファベットで表記してある．
- 補足説明を行うため，脚注を多用している．
- **スワップと CDS** のようにタイトルを二重線で囲ってある箇所があり，そこでは追加的な話題を紹介している．これらを読み飛ばしても本筋の理解に影響はないが，重要な話題もあるのでできる限り読んでもらいたい．
- 章や節，定理や命題，図，式，脚注，章末問題やページなどを参照している箇所，及び，目次は青字で表記されているが，青字部分をクリックすると参照先にジャンプするよう設定してある．また，文献を参照している箇所では，赤字で表記されている文献番号をクリックすると，参考文献リストの該当箇所にジャンプする．
- 巻末に「索引」を付けてある．

参考文献

[1] 岸本直樹，池田昌幸「入門・証券投資論」有斐閣.

[2] ジョン・ハル (三菱 UFJ モルガン・スタンレー証券市場商品本部訳)「フィナンシャルエンジニアリング (第 9 版)」きんざい.

[3] デービッド・ルーエンバーガー (今野浩他訳)「金融工学入門 (第 2 版)」日本経済新聞出版.

[4] S.E. シュリーヴ (長山いずみ他訳)「ファイナンスのための確率解析 I」丸善出版.

[5] S.E. シュリーヴ (長山いずみ他訳)「ファイナンスのための確率解析 II」丸善出版.

[6] 楠岡成雄，長山いづみ「数理ファイナンス」東京大学出版会.

[7] 関根順「数理ファイナンス」培風館.

[8] 舟木直久「確率論」朝倉書店.

[9] ツァピンスキ，コップ (二宮祥一，原啓介訳)「測度と積分　入門から確率論へ」培風館.

[10] トマス・ビョルク (前川功一訳)「数理ファイナンスの基礎　連続時間モデル 」朝倉書店.

[11] ディヴィッド・ゲール (和田貞夫, 山谷恵俊訳)「線型経済学」紀伊國屋書店.

[12] 丸山徹「経済数学」知泉書館.

[13] H. Föllmer & A. Schied「Stochastic Finance(4th edition)」de Gruyter.

第 1 章及び第 5 章の作成において，[1] を参照した．これは数学が苦手な学生にも読めるよう配慮して書かれている教科書である．さらに，ファイナンス論の様々なトピックを網羅している教科書として [2],[3] がある．これら 2 冊は，この講義ノートを作成する際にも随所で参照した．しかし，かなり分厚く高価なのが難点である．一方，オプション価格付け理論に特化した文献として [4],[5] を挙げておく．和書としては [6] や [7] があるが，どちらも難易度は高い．さらに，確率論の教科書として [8] と [9] を挙げておく．実際に，補遺 A の作成にあたり参照した．なお，2.3 節作成にあたり [10]，[11] 及び [12] を，第 6 章の作成において [13] を参照した．

目 次

第 1 章　ファイナンス論の基礎　1

1.1　金利・株式・債券 1

1.1.1　現在価値と将来価値 1

1.1.2　金利の複利計算 2

1.1.3　株式 3

1.1.4　債券 4

1.2　デリバティブ 7

1.2.1　先物と先渡 7

1.2.2　オプション 9

1.3　モデルと確率論 12

1.3.1　金融市場モデル 12

1.3.2　確率モデル 13

1.3.3　完全競争的市場 14

章末問題 15

第 2 章　1 期間モデルにおけるオプション価格付け理論　16

2.1　1 期間 2 項モデル 16

2.1.1　準備 16

2.1.2　複製ポートフォリオによる価格付け 17

2.1.3　マルチンゲール確率 21

2.2　資産価格理論の基本定理 23

2.2.1　第一基本定理 23

2.2.2　第二基本定理 25

2.3　一般化された 1 期間モデル 27

2.3.1　モデルの記述 28

2.3.2　第一基本定理 30

2.3.3　第二基本定理 34

2.3.4　オプションの価格付け 37

章末問題 38

第 3 章　多期間モデルにおけるオプション価格付け理論　40

3.1　多期間 2 項モデル 40

3.1.1　準備 40

3.1.2 複製ポートフォリオによる価格付け 42
3.1.3 マルチンゲール確率と基本定理 44
3.1.4 オプション価格と複製ポートフォリオの計算 46
3.1.5 Cox-Ross-Rubinstein 公式 49
3.2 アメリカ型オプション 52
3.2.1 アメリカ型コールオプション 53
3.2.2 アメリカ型プットオプション 56
章末問題 57

第 4 章 Black-Scholes モデルとその発展 59
4.1 モデルの導出とオプション価格公式 59
4.1.1 Black-Scholes モデルの導出 60
4.1.2 マルチンゲール確率 61
4.1.3 Black-Scholes 公式 66
4.2 Black-Scholes モデルの発展 68
4.2.1 Black-Scholes 確率微分方程式 68
4.2.2 Black-Scholes 偏微分方程式 71
4.2.3 デルタヘッジ 73
4.2.4 ボラティリティ 75
4.2.5 アメリカ型オプション 78
章末問題 79

第 5 章 最適ポートフォリオと CAPM 80
5.1 平均分散アプローチ 80
5.1.1 実行可能領域と効率的フロンティア (安全資産がない場合) 82
5.1.2 実行可能領域と効率的フロンティア (安全資産がある場合) 84
5.1.3 効用関数と無差別曲線 86
5.1.4 最適ポートフォリオ 88
5.2 CAPM 89
5.2.1 市場ポートフォリオ 89
5.2.2 CAPM の導出 90
5.3 CAPM の発展 93
5.3.1 ゼロベータ CAPM 93
5.3.2 マルチファクターモデルと APT 94
章末問題 97

第 6 章　リスク測度 **98**
6.1　代表的なリスク測度 98
6.1.1　VaR 99
6.1.2　CVaR 101
6.2　公理論的リスク測度 102
6.2.1　定義と例 102
6.2.2　Acceptance set と表現定理 103
章末問題 106

補遺 A: 確率論 **107**
A.1　有限集合上の確率論 107
A.1.1　確率空間 107
A.1.2　確率変数と期待値 109
A.1.3　分散・共分散・相関係数 110
A.1.4　独立性と条件付き確率 111
A.2　測度論的確率論の基礎 113
A.2.1　確率空間 113
A.2.2　確率変数・分布・期待値 114
A.2.3　正規分布 116
A.2.4　特性関数 117
A.3　極限定理 117
A.3.1　確率変数列の収束 117
A.3.2　大数の法則 119
A.3.3　分布収束と中心極限定理 120
A.4　ランダムウォークと Brown 運動 122
A.4.1　ランダムウォーク 122
A.4.2　Brown 運動 123
A.4.3　ランダムウォークから Brown 運動へ 124
章末問題 125

補遺 B: 章末問題の解答 **127**
第 1 章　章末問題の解答 127
第 2 章　章末問題の解答 127
第 3 章　章末問題の解答 129
第 4 章　章末問題の解答 131
第 5 章　章末問題の解答 133
第 6 章　章末問題の解答 133
補遺:A　章末問題の解答 135

補遺 C: 過去の試験問題 **136**
ファイナンス論 a の試験問題 136
ファイナンス論 b の試験問題 137

索引 **138**

第1章　ファイナンス論の基礎

本章では，ファイナンス論を学ぶ準備として，最低限押さえておかなければならない用語や概念を紹介する．ファイナンス論では金融市場を数理モデルで表し解析を行うが，その構築方法や本講義で扱うモデルの前提条件について，1.3 節で議論する．

1.1　金利・株式・債券

この節では，現在価値と将来価値，金利の複利計算，株式の理論価格，債券などファイナンス論を学ぶ上で必須となる用語やその計算方法について議論する．なお，将来の状態が確定している，または，予想できることを前提とし，この節の議論では確率論を用いない．

1.1.1　現在価値と将来価値

日当 1 万円のアルバイトをするとき，日当の支払いが 1 年後であったらどうであろうか．日当を今日受け取った場合，それを銀行に預金すれば，**利子** (interest)[1)]が付く．例えば，利子は 300 円であったとしよう．このとき，日当の支払いが 1 年後であれば，10,300 円支払われるべきであると考えることもできる．つまり，今日の 1 万円と 1 年後の 10,300 円は同じ価値を持つと言える．この 1 万円を**元本** (principal) といい，利子 300 円の元本に対する比率を**金利** (interest rate) という[2)]．また，1 年後の 10,300 円を，今日の 1 万円に対する 1 年後の**将来価値** (future value) という．つまり，元本 P 円，金利 r の将来価値は $(1+r)P$ 円となる．通常，金利は非負[3)]なので，元本よりも将来価値の方が大きな値になる．一方，1 年後の 10,300 円を基準にすれば，今日の 1 万円を**現在価値** (present value) という．よって，1 年後の P 円の現在価値は，金利を r とすれば $(1+r)^{-1}P$ 円となる．将来価値から現在価値を求めることを，現在価値に**割り引く** (discount) といい，r を**割引率** (discount rate)，$(1+r)^{-1}$ を**ディスカウントファクター** (discount factor) という．

[1)] 利息と言っても良い．
[2)] 利率または利子率ともいう
[3)] マイナス金利政策を取ることもあるので，常に非負とは限らないが，本講義では金利は常に非負であると仮定する．

注意 1.1 ファイナンス論で用いる「金利」という用語は，銀行預金やローンなど特定の金融商品の金利を指すのではなく，様々な金融商品全般の金利水準を意味することが多い．特に断らない限り，本講義でも金利といった場合はこの意味で用い，外生的に与えられるものとする．なお，実データを用いる際は，金利として無担保コール翌日物金利などの何らかの指標を用いる．□

1.1.2 金利の複利計算

前の小節で議論したアルバイトの日当について，その支払いが 2 年後であったとしたらどうであろうか? 通常，金利は「1 年あたりの金利」である年率で表示されるので，今日から 2 年後までの利子をこの年率から計算しなければならない．この計算方法には**単利** (simple interest) と**複利** (compound interest) の 2 通りある．まず，元本 P 円の 2 年後の将来価値を単利で計算しよう．金利を r とすれば，1 年間で得られる利子は rP 円なので，2 年間ならば $2rP$ 円であると考え，2 年後の将来価値は $(1+2r)P$ 円となる．よって，n 年後の将来価値は $(1+nr)P$ 円となる．一方，複利では，1 年後の将来価値は $(1+r)P$ 円であるから，これを新たな元本と見なし，さらに 1 年後の将来価値，つまり，今から 2 年後の将来価値を計算する．この結果，2 年後の将来価値は $(1+r)^2P$ 円，n 年後の将来価値は $(1+r)^nP$ 円となる．単利より複利の方が将来価値は大きくなる．なお，実際の金融市場において単利が用いられる場合は限られており，本講義でもこれ以降の金利計算はすべて複利で行う．

例 1.2 あるプロスポーツ選手が所属チームと n 年間の契約を交わし，契約日から k 年後に支払われる給与を S_k 円とする．ただし，$k = 0, 1, \ldots, n-1$ である．金利を r として，この契約の現在価値 PV と n 年後の将来価値 FV を複利で計算すると，

$$PV = \sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^{-k} S_k, \quad FV = \sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^{n-k} S_k$$

となる．この $S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}$ のように，資金の授受を時系列で表したものを**キャッシュフロー** (cash flow) という．なお，複数のキャッシュフローに対し，それらの現在価値や将来価値を計算することで，キャッシュフローどうしを比較することができる．

金利は年率で表示されると述べたが，1 年に満たない期間の将来価値や現在価値はどう計算すべきであろうか．例えば，半年後の将来価値を計算する際は，金利を $r/2$ として計算する．つまり，元本 P 円の半年後の将来価値は $\left(1+\frac{r}{2}\right)P$ 円となる．従って，1 か月後であれば $\left(1+\frac{r}{12}\right)P$ 円，翌日であれば $\left(1+\frac{r}{365}\right)P$ 円となる．さらに，1 年後の将来価値を計算する際，例えば

半年を 1 期間として計算する方法もある．これは複利計算における利子の元本への組み入れを半年毎に行い，1 年後の将来価値を求める方法である．半年後の将来価値は $\left(1+\frac{r}{2}\right)P$ 円であり，これを新たな元本としてさらに半年後の将来価値を計算する．よって，1 年後将来価値は $\left(1+\frac{r}{2}\right)^2 P$ 円となる．この計算における「半年」のように，利子を元本に組み入れる期間の長さを**複利期間** (compounding period) という．例えば，複利期間を 1 か月とした場合の 1 年後将来価値は $\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12} P$ 円，さらに一般に，複利期間を $1/m$ 年とした場合の 1 年後将来価値は $\left(1+\frac{r}{m}\right)^m P$ 円となる．また，1 年後に発生するキャッシュフロー C の現在価値を $1/m$ 年複利で計算すると，$\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-m} C$ 円となる．従って，複利期間が短くなればなるほど将来価値は大きく，現在価値は小さくなる．現在価値や将来価値を計算する際，キャッシュフローの発生時刻は複利期間の整数倍でなければならない．よって，複利期間の設定は，分析の対象となるキャッシュフローが発生するタイミングによって決めることになる．

それでは複利期間をどんどん短くするとどうなるであろうか．上記の $1/m$ 年複利の m を ∞ に近づけると，

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r}{m}\right)^m P = e^r P \tag{1.1.1}$$

となる[4]．これを**連続複利** (continuous compounding) という．連続複利を用いれば，任意の正数 t に対して，t 年後の将来価値を計算することができ，それは $e^{rt}P$ 円で与えられる．また，t 年後に発生するキャッシュフロー C の現在価値は $e^{-rt}C$ 円となる．第 4 章で紹介する Black-Scholes モデルのような連続時間モデルでは，任意の時刻にキャッシュフローが発生する可能性があるため，連続複利が用いられる．

問 1.1 (1.1.1) を証明せよ．

1.1.3 株式

株式 (stock) とは企業[5]が資金調達を目的に発行する有価証券[6]である[7]．株式の保有者を**株主** (stochholder) といい，企業の利益の一部を**配当** (dividend) という形で受け取ることができる[8]．

---

[4] これは自然対数の底 e の定義 $e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ よりすぐに分かる．

[5] ここでは株式会社を指す．

[6] 有価証券とは，株式や債券など市場で売買の対象となる証券 (財産における権利や義務が記載された文書) のことである．

[7] 株式の発行以外にも金融機関からの融資や債券の発行などにより企業は資金調達を行うことができる．

[8] 配当以外にも株主には株主総会での議決権が与えられる．

株式を保有することで受け取れるキャッシュフローは配当だけなので[9]，将来受け取る配当の割引現在価値を計算すれば株価が求まるはずである．しかし，配当は，企業の収益，配当政策[10]やマクロ経済状況など様々な要因が複雑に絡み合って決まるものである．従って，将来の配当は不確実であり，その値を確定できない．そこで，将来の配当の期待値の割引現在価値を計算し，それを現時点の株価の理論値であると考えることにする．これを**配当割引モデル** (dividend discount model) という．例えば，配当の支払いは年に 1 回で，n 年後の配当の期待値を $D_n(\geq 0)$ 円，割引率を $k > 0$ とすれば，株価 S は

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{(1+k)^n}$$

となる[11]．このように D_n の予想を立て株式の理論価格を求めることは，株式投資を行う投資家にとっては重要な分析ツールである[12]．また，配当には不確実性があるため，割引率 k として市場金利をそのまま当てはめることは適切ではなく，k の値は配当の不確実性に依存するはずである．つまり，一般に不確実性が高ければ k も高く，不確実性が低ければ k も低くなる．k の値の決定は非常に難しい問題であり，ここではこれ以上立ち入らない．

ここでは，D_n の予想について，最初の配当の期待値を $D(> 0)$ 円とし，以後一定の率 $g > 0$ で配当の期待値が成長し続けるモデルを考える．このモデルを**定率成長モデル** (constant growth model) または **Gordon モデル**という．このとき、$D_n = (1+g)^{n-1}D$ であり，$k - g > 0$ であれば，株価 S は

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+g)^{n-1}D}{(1+k)^n} = \frac{D}{k-g} \tag{1.1.2}$$

となる．特に，$g = 0$ の場合，$S = D/k$ となる．この場合を**ゼロ成長モデル** (zero growth model) という．

問 1.2 (1.1.2) の 2 つ目の等号を確認せよ．

1.1.4 債券

債券 (bond) とは，国や企業などが資金調達を行う目的で発行する有価証券で，発行者が保有者に支払うキャッシュフローが予め定められているもの

[9] もちろん，将来のある時点で売却すれば，その時点における株価を受け取ることになる．しかし，ここでは永久に株式を保有すると仮定して話しを進める．

[10] 収益のうちどの程度を配当として支払うかに関する政策．

[11] 配当の支払いが半年毎であれば半年複利を用いる．

[12] これ以外にも，企業の財務状況などを分析する**ファンダメンタル分析** (fundamental analysis)，移動平均線やローソク足などのチャートを分析する**テクニカル分析** (technical analysis) などがある．さらに，より高度な数理的，統計的な手法を用いた分析手法もあり，この分析を行う専門家を**クオンツ** (quant) という．また，プライシングやリスクのモデル開発を行う専門家のこともクオンツと呼ぶ．

である．なお，国が発行するものを**国債** (government bond)，都道府県や市町村が発行するものを**地方債** (municipal bond)，企業が発行するものを**社債** (corporate bond) という．社債には，保有者が債券を発行会社に引き渡す際に発行会社の株式を請求する権利が付された**転換社債** (convertible bond) など，キャッシュフローが複雑なものもある．

債券には，**額面** (face value) と**満期** (maturity)[13)]が定められており，満期になると額面に記載された金額が発行者から保有者へ支払われる．これを**償還** (redemption) という．債券の発行日から満期までの長さが 1 年以下のときは短期，1 年超 5 年以下のときは中期，5 年超 10 年以下のときは長期，それ以上の時は超長期と呼ばれる．満期における償還以外にも，発行者から保有者に一定の金額が一定期間毎に支払われることがある．これを**クーポン** (coupon) という．クーポンの支払いは半年毎に行われることが多い．1 年間に支払われるクーポンを額面で割ったものを**クーポンレート** (coupon rate) という．また，クーポンの支払いがない債券のことを**ゼロクーポン債** (zero coupon bond) または**割引債** (discount bond) という．

例 1.3 2 年満期，額面 100 円，クーポンレート 2%，クーポンの支払いは半年毎の債券を考えよう．1 年間に支払われるクーポンは 2 円なので，1 回の支払いでは 1 円となる．このクーポンの支払いは，発行日の半年後から満期日まで合計 4 回行われる．発行日にはクーポンの支払いはないが，満期日にもクーポンが支払われることに注意しよう．なお，満期では償還も行われるので，満期におけるキャッシュフローは 101 円である．

問 1.3 例 1.3 のクーポン債の現在価値を半年複利で求めよ．ただし，割引率は 0.02 とする．

新規に発行された債券は発行市場を通じて取引される．また，すでに発行された債券は流通市場で売買される．債券の価格は，額面，満期までの残存期間，クーポンレート，発行者の信用[14)]，その時々の市況など様々な要因によって決まる．今，満期までの残存期間 n 年，額面 F 円の割引債に P 円の価格が付いているとしよう．キャッシュフローの発生は満期における償還だけなので，債券から発生するキャッシュフローの年複利による割引現在価値は，割引率を y とすれば $(1+y)^{-n}F$ 円となる．この値が価格 P と等しくなるとき，債券の保有者にとって，y は 1 年あたりの収益率と見なすことができる．これを**利回り**またはイールド (yield) という．なお，日本の債券市場では単利による利回りが使用されることが多いが，ここでは複利による利回りの計算方法について議論する．

[13)] 償還期限とも言う．

[14)] 債券の発行者がクーポンや額面の支払いができなくなることを**債務不履行**または**デフォルト** (default) という．デフォルトが発生する**リスク** (risk)[15)]を**信用リスク** (credit risk) といい，債券取引において重要な役割を果たしている．

例 1.4 満期までの残存期間 n 年，額面 F 円，クーポンの支払いは半年毎で 1 年間に支払われるクーポンの金額が C 円 (C/F がクーポンレート) の債券に対し，P 円の価格が付いているとする．この債券の半年複利による利回り y は次の方程式の解となる:

$$P = \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{\frac{C}{2}}{\left(1+\frac{y}{2}\right)^k} + \frac{F+\frac{C}{2}}{\left(1+\frac{y}{2}\right)^{2n}}.$$

これより，債券価格が額面に等しいとき，つまり，$P = F$ であるとき[16)]，利回りはクーポンレートに等しくなることが分かる[17)]．

問 1.4 例 1.3 のクーポン債の価格が 99 円であるとき，半年複利による利回り y が満たす式を求めよ．

額面やクーポンや残存期間などの条件が同じであれば，価格が高いほど利回りは低くなり，利回りが高いほど価格は安くなる．また，一般に発行者の信用が低い場合，利回りは高くなる．特に，信用の違いによって生じる国債の利回りとの差を**クレジットスプレッド** (credit spread) という．一方，債券の利回りには満期までの市場金利の予測が含まれていると考えられる．満期が 1 年後の債券ならば今後 1 年間の金利の動向に関する予測が含まれ，残存期間が 5 年ならば今から 5 年間の金利の予測が含まれている．従って，発行者が同じでも残存期間が異なれば，利回りも異なる．なお，残存期間以外の条件が類似した債券の利回りをプロットしてえられる曲線を**イールドカーブ** (yield curve) という．一般的に，イールドカーブは図 1.1 のように右上がりになる[18)]．このようなイールドカーブを**順イールド** (normal yield) という．一方，ごく稀に右下がりになることがある．そのようなイールドカーブを**逆イールド** (inverted yield) という[19)]．

図 1.1: 順イールドのイールドカーブ

16) このような債券を**パー** (par) という．
17) 債券がパーであるときのクーポンレートを**パーレート** (par rate) という．
18) この原因として，長期債券の方が不確実性が大きいために高利回りになり易いことがあげられる．
19) 将来の金利が大幅に下がると予想されるときに起こる．逆イールドの発生は将来の景気後退の予兆とされている．

なお，国債はデフォルトする可能性が非常に低く[20]，信用リスクを考慮する必要が殆どないため，その割引債の利回りは満期までの金利水準を表していると考えられる．なお，残存期間による利回りの違いを**金利の期間構造** (term structure of interest rates) という．原理的には，1 年満期の割引国債を購入し，1 年後に償還された金額を再び 1 年満期の割引国債の購入に充てることで得られる収益率は，2 年満期の割引国債の利回りに等しいはずである．従って，割引国債のイールドカーブを利用すれば，1 年後から 2 年後までの金利のように，ある将来時点からその先のある将来時点までの金利を導出することも可能となる．

1.2 デリバティブ

何かある特定の資産，これを**原資産** (underlying asset) と呼ぶ，の将来価値に応じてキャッシュフローが決まる有価証券を**金融派生証券**または**デリバティブ** (derivative) と呼ぶ．先物，スワップ，オプションなど様々な種類のデリバティブが取引されている．本節では，主たるデリバティブの基本的な仕組みや理論価格の計算方法を紹介する．

1.2.1 先物と先渡

予め決められた量の原資産を，予め決められた日に予め決められた価格で売買する契約において，取引所で取引されるものを**先物契約** (futures contract) といい，**店頭市場** (over-the-counter market, OTC market) における相対取引で行われるものを**先渡契約** (forward contract) という[21]．例えば，2023 年 10 月第 2 金曜日に，金 1 キログラムを，1 グラム当たり 8,000 円で売買する契約を，2023 年 4 月第 3 水曜日に結んだとしよう．なお，4 月第 3 水曜日を**約定日** (contract date)，10 月第 2 金曜日を**受渡日** (delivery date) といい，受渡日に原資産が売買されることを**受け渡し** (delivery)，その価格を**先物価格** (futures price) または**先渡価格** (forward price) という．この例における原資産は金 1 キログラムで，その先物価格 (先渡契約なら先渡価格) は 800 万円である．先物や先渡における原資産としては，株価指数[22]，国債[23]，金利[24]，外国通貨，金や銀などの貴金属，原油などの鉱物資源，農作物などがある．さ

[20] ただし，発行国によってはデフォルト可能性が無視できない場合もある．
[21] 実務上は，両者をまとめてフォワードと呼ぶ場合もあり，この区別は必ずしも正確ではないことに注意せよ．
[22] 日経 225 先物や TOPIX 先物がある．
[23] 主には，クーポンレート 6%，残存期間 10 年の長期国債が取引されている．
[24] 代表的なものとして，ユーロ円 3 か月金利がある．これは，想定元本 1 億円のユーロ円 TIBOR を原資産とする先物である．なお，ユーロ円とは海外やオフショア市場で取引される円のこと，TIBOR とは Tokyo InterBank Offered Rate の略で東京銀行間取引金利のことである．ただし，2024 年末にユーロ円 TIBOR を廃止し日本円 TIBOR に統合することが検討されている．

らに，電力の自由化に伴い，電力の先物取引も開始されている．なお，先物あるいは先渡において，原資産を将来買う契約をしている状態を**買いポジション** (long position)，売る契約をしている状態を**売りポジション** (short position) という．また，先物と先渡を比較すると，先渡契約は相対取引であるから，契約内容に関して個別交渉が可能であり柔軟性に富んでいるが，契約の不履行というリスク[25]が常に付きまとう．一方，先物契約は取引所で取引されるので，上場されているもの以外は取引ができない上に，取引所が定めたルールに従う必要がある．ただ，契約の不履行が起きないような仕組みになっており，カウンターパーティーリスクが少ない点が強みである．

先物と先渡の仕組みについて述べよう．まず，契約を結ぶ約定日にはキャッシュフローは発生しないが，先物契約の場合は必要な額の**証拠金** (margin) を精算機関に預け入れる必要があり[26]，営業日毎に**値洗い** (marking to market) が行われる．この値洗いについて，上記の例を用いて少し詳しく説明しよう．例えば，約定日の翌日 (4 月第 3 木曜日) に先物価格が 1 グラム当たり 8,010 円に変動したとしよう．つまり，4 月第 3 木曜日を約定日とする同一の先物契約 (受渡日は 10 月第 2 金曜日のまま) の先物価格が 8,010 円に変動したということである．もし第 3 水曜日に 1 単位買い建てた[27]場合，この変動は 1 万円の利益を意味するので，証拠金残高が 1 万円増える．一方，売りポジションなら証拠金残高は 1 万円減少する．また，7,980 円に変動した場合は，買いポジションなら 2 万円減り，売りポジションなら 2 万円増える．このように，同じ受渡日の先物契約の価格変動に伴い証拠金残高を増減させることを値洗いという．なお，証拠金残高が精算機関が定める最低必要額に満たない場合は，追加証拠金を差し出す必要がある．

値洗いは受渡日まで続けられるが，先物取引では実際に受け渡しが行われることは稀であり，反対売買で事前にポジションを閉じてしまうことが多い．例えば買いポジションならば，同一先物契約，同一単位数を受渡日以前に売り建てることで決済する．なお，先渡では実際に受け渡しが行われることが多いが，株価指数など原資産によっては受け渡しができないこともあり，そのような場合は現物価格[28]との差金決済が行われる．

最後に，先物価格や先渡価格の理論値について議論しよう．先物の場合は値洗いが行われるためキャッシュフローが複雑になり，先物価格の理論計算も難しくなる．そこで，値洗いがない先渡契約に対する理論価格を考察する．約定日における原資産 1 単位の現物価格を S_0 円，先渡価格を F 円，約定日から受渡日までの金利を r とする．ここで 2 つの投資戦略[29]を比較しよう．1

---

[25] このようなリスクを**カウンターパーティーリスク** (counterparty risk) という．
[26] 大体，取引額の数%，つまり，上記の例で言えば 800 万円の数%である．
[27] 買いポジションを取ることを買い建てるという．
[28] その時点における価格，つまり，この場合には受渡日における原資産価格を指す．現物のことをスポットともいう．
[29] **戦略** (strategy) という用語はファイナンス論では度々登場する．後に紹介するポートフォリオも似たような意味を持つ．詳しくは 2.1.2 節を参照のこと．

つ目は，約定日に先渡契約 1 単位を買い建てる戦略である．発生するキャッシュフローは，受渡日に F を支払い原資産 1 単位を受け取ることである．2 つ目の戦略は，約定日に S_0 円借りて原資産 1 単位を購入し，それを受渡日まで保有し借金を返済する場合であり，約定日のキャッシュフローは 0 円で，受渡日は $-(1+r)S_0$ 円である．なお，原資産によっては輸送費用や保管費用，またはクーポンや配当の受け取りが発生することもあるが，ここでは簡単のためそのようなキャッシュフローは無視することにする．上記 2 つの戦略は共に，約定日にキャッシュフローは発生せず，受渡日後には原資産 1 単位を保有している状態となる．従って，受渡日のキャッシュフローは等しいはずだから

$$F = (1+r)S_0$$

が成立する．つまり，受渡価格は現物価格の将来価値に等しい．なお，上記の等式が成立しない場合，例えば $F > (1+r)S_0$ ならば，先渡契約を売り建て，同時に 2 つ目の戦略を取ると，受渡日のキャッシュフローは正になり利益が得られる．一方，この戦略の元手は 0 なので，確実に利益が出る戦略である．このように，費用 0 で，損失の可能性がなく，利益が得られる可能性のある戦略を**裁定機会** (arbitrage) [30] という．裁定機会が存在するとき，すべての投資家は裁定機会を取ろうとする．つまり，この例で言えば先渡契約を売り建てようとし，だれも反対ポジションを取ろうとしない．そのため，先渡価格 F が下落するか，現物価格 S_0 が上昇し，裁定機会は消滅する．その結果，$F = (1+r)S_0$ が成立する．$F < (1+r)S_0$ の場合も同様である．裁定機会はファイナンスにおいて最重要概念の一つであり，今後何度も登場する．なお，次章において裁定機会の数学的定義を与える．

問 1.5 上記の例において，$F < (1+r)S_0$ である場合の裁定機会を述べよ．

1.2.2 オプション

オプションとは，原資産を予め決められた日，または，予め決められた日までの任意の日に，予め決められた価格で買う，または，売る権利のことである．例えば,「X 社の株式 1000 株を 2023 年 12 月 1 日に 1 株あたり 1500 円で買う権利」と言った具合である．この例における「2023 年 12 月 1 日」のことを**満期** (maturity) といい,「1500 円」のことを**権利行使価格** (strike price) という[31]．また，この例のように「買う権利」である場合を**コールオプション** (call option),「売る権利」である場合を**プットオプション** (put option) という．さらに，この例では権利行使が満期日に限られているが，このようなオプションを**ヨーロッパ型オプション**または**ヨーロピアンオプション** (European

[30] 裁定ポートフォリオ，裁定戦略などということもある．
[31] 単に行使価格ということもある．

option) といい，満期日までの任意の日に行使可能なオプションを**アメリカ型オプション**または**アメリカンオプション** (American option) という[32]．従って，上記の例におけるオプションはヨーロッパ型コールオプションである．オプションには，権利を保有する**買い手** (buyer, holder) と，権利を発行する**売り手** (seller, writer) の間で取引される契約である．実際，多くのオプションは相対で取引されるが，取引所で取引されているものもあり，そこでは証拠金や値洗いなど先物市場と同様の仕組みが存在する．ここでは，取引所での仕組みについてはこれ以上触れず，相対取引を念頭に議論する．また，個別銘柄の株式を原資産とした例を紹介したが，実際は株価指数，外国通貨，長期国債先物，金利先物[33]などを原資産とする場合が多い．

オプションを取引することによって発生する満期日におけるキャッシュフローは，その時点における原資産価格に依存する．上記の例において，満期日における原資産価格が行使価格 1500 円を超えていれば，買い手は権利を行使して 1500 円で売り手から購入し，市場価格で売却することができる．従って,「原資産価格 $>$ 行使価格」であれば，買い手は「原資産価格 $-$ 行使価格」の利益を得ることができる．一方，原資産価格が行使価格を下回っているときは，買い手は権利を放棄すれば良く，このときのキャッシュフローは 0 となる．以上まとめると，満期日における原資産価格を S 円，権利行使価格を K 円としたとき，ヨーロッパ型コールオプションの買い手の満期日におけるキャッシュフローは $(S-K)^+$ となる．ただし，$(x)^+$ は $x>0$ なら x，$x\leq 0$ なら 0 となる関数である．つまり，$(S-K)^+=\max\{S-K,0\}$ である．また，$a\vee b:=\max\{a,b\}$ という記号を使って，$(S-K)^+=(S-K)\vee 0$ と表すこともある．この $(S-K)^+$ の値を**ペイオフ** (payoff) という．同様の考察を行えば，売る権利であるプットオプションのペイオフは $(K-S)^+$ となることが分かる．なお，今紹介したコールやプットを，通常のオプションという意味で**プレインバニラオプション** (plain vanilla option) という．それに対し，バニラオプション以外のオプションを**エキゾチックオプション** (exotic option) という．例えば，満期日までに原資産価格がある上限を超えるなど，一定の条件を満たしたときにペイオフが消滅する**ノックアウトオプション** (knock-out option) や，契約時点から満期日までの原資産価格の平均値の関数でペイオフが与えられる**アジアンオプション** (Asian option) などがある．また，1.1.4 節で紹介した転換社債もエキゾチックオプションの一つであると解釈できる．

オプションについて議論する際に必要となる用語を追加する．オプションが**イン・ザ・マネー** (in the money, ITM) であるとは，オプションを今すぐ行使すれば買い手に利益をもたらす状態を指す．例えば，コールオプションにおいて，現時点における原資産価格 S_0 が行使価格 K を上回っているとき，つまり，$S_0>K$ であるとき，オプションは ITM である．また，プットでは

[32] この呼び名に地理的理由はない．
[33] 日本市場では，長期国債先物，金利先物を原資産とするオプションは，アメリカ型オプションとして取引されている．

$S_0 < K$ のとき ITM となる．一方，コールにおいて $S_0 < K$ であるときや，プットにおいて $S_0 > K$ であるとき，今すぐ行使したとしてもペイオフは 0 である．このような状態を**アウト・オブ・ザ・マネー** (out of the money, OTM) であるという．なお，丁度 $S_0 = K$ であるとき，**アット・ザ・マネー** (at the money, ATM) であるという．

ここで，ある資産を保有している投資家を考える．将来のある時点でその資産を売却したいとき，投資家はその資産価格が下落するリスクを抱えている．このようなケースでは，この資産を原資産とする OTM のプットオプションを保有することでリスクを**ヘッジ** (hedge)[34]することができる．また，将来ある資産を購入しようとしている投資家は，資産価格が上昇するリスクに直面しており，OTM のコールを保有することでリスクヘッジが可能となる．以上のような視点から，OTM オプションの需要が高いことが分かる．実際，オプション市場におけるデータを見ても，ATM に近い OTM の取引量が多くなっている．

オプションは，先物や先渡と同様，原資産を将来決められた価格で売買する契約である．しかし，オプションは権利であり義務ではないので，権利の買い手は権利を放棄することが可能である．これが先物や先渡との違いである．その結果，満期日におけるキャッシュフロー[35]は非負になる．よって，1.2.1 節で紹介した裁定機会の考え方より，オプションを保有するためには，契約時点で売り手にいくらかの対価を支払う必要が生じる[36]．この対価を**オプション価格** (option price) または**プレミアム** (premium) という．オプションを考える際は，将来の原資産価格が不確実であることを前提とする．従って，オプションの理論価格を計算するためには，原資産価格に関する確率モデルを構築する必要がある．このように何らかの確率モデルを用いてオプション価格を計算したり，その性質を調べる分野を**オプション価格付け理論** (option pricing theory) と呼び，ファイナンス論の主要トピックになっている．実際，このノートの第 2 章から第 4 章では，様々な確率モデルに対するオプション価格付け理論を紹介する．

スワップと CDS　これまで紹介した先物，先渡，オプション以外にも，キャッシュフローを交換する契約である**スワップ** (swap) というデリバティブも活発に取引されている．代表的なスワップとして，固定金利と変動金利を交換する**金利スワップ** (interest rate swap) がある．これは，ある額の資金，これを想定元本という，を固定金利で調達した A と，同額の資金を変動金利で調達した B が，ある一定期間において，金利の支払いによって発生するキャッシュフローを交換する契約のことである．これ以外のスワップとして，**通貨スワップ** (currency swap) などもある．

[34] ヘッジという言葉はファイナンスの文献に度々登場する．これは，リスクの回避，または将来の支払いに対する準備等を意味している．
[35] アメリカ型の場合は，権利を行使した時点におけるキャッシュフロー．
[36] この点も先物や先渡と異なる．

また，スワップの名が付いたデリバティブとして，**クレジット・デフォルト・スワップ** (credit default swap, CDS) がある．これは，資金を貸し出した際に生じる信用リスクを移転する契約である．例えば，X 社に資金を貸し出した A 銀行が，B 銀行にプレミアムを支払うことで，X 社が債務不履行に陥った場合に，債務の返済を B 銀行に肩代わりしてもらう契約である．2000 年代初頭に CDS の取引高が大幅に増加したが，これが 2007 年頃に発生した金融危機，所謂リーマンショックを悪化させた一因とも言われている． □

1.3 モデルと確率論

この節では，ファイナンス論で扱われるモデルについて議論する．モデルの構成要素，構築方法及び前提条件について述べ，とりわけ，確率モデルの意味について詳しく論じる．また，理論と実務の違いについても触れる．

1.3.1 金融市場モデル

ファイナンス論では，オプションの価格付けや保有資産のリスク評価などその時々の目的に合わせて，金融市場を数理モデルで表現し，問題の解決を目指す．現実の金融市場は，無数の資産が多種多様な市場参加者によって取引されており，その構造は極めて複雑で範囲を限定することもできない．例えば，市場には個人投資家もいれば機関投資家もいる．個人投資家の情報収集能力や分析能力は，機関投資家には及ばない．また，外国人投資家もおり，日本市場は海外の市況から強い影響を受ける．さらに，金融市場と言っても株式や債券だけでなく，不動産や原油などの金融資産以外の資産の動きとも無関係ではない．そこで，**それぞれの目的に合わせて市場の範囲を限定し，本質的でないと思われる部分は簡略化して，金融市場の数理モデルを構築する．**

数理モデルを構築するときは，まず取引時刻と取引可能な資産を特定する．ファイナンス論で扱う問題は，つまるところ将来のキャッシュフローに対して現時点で取るべき投資家の行動や，その結果として得られる現時点での資産価格に関するものである．よって，取引時刻には現在時刻と 1 つまたは複数の将来時刻が含まれる．取引時刻はパラメータを用いて表現される．現在時刻を 0 と表すことが多く，さらに，満期と呼ばれる最終時刻が設定されていることが多い．パラメータの取り得る値が $0, 1, 2, \ldots$ のように与えられる**離散型** (discrete) と，閉区間 $[0, T]$ のように与えられる**連続型** (continuous) がある．一方，取引可能な資産には，その将来価格が現時点で確定している**安全資産** (riskless asset) と，確定していない**危険資産** (risky asset) がある．安全資産として想定されている金融資産は，現金，銀行預金口座や割引国債などであり，その将来価格は金利を用いて表現される．危険資産としては，株

式，将来の利回りが確定していない債券，デリバティブ，外国通貨などがあるが，本講義では特に断らない限り株式を念頭に議論する．

そして，数理モデルの構築とは，各資産の各取引時刻における価格を数学的に記述することである．とりわけ，危険資産価格の記述においては「将来価格が確定していない」ということの意味をはっきりさせる必要がある．「確定していない」とは「将来起こり得る事象が複数存在する」という意味であり，これを**不確実性** (uncertainty) という．そこで，「不確実性」について少し掘り下げてみよう．

1.3.2 確率モデル

例えば，ある株式のある将来時点 (明日の正午など) における価格について考えるとき，

1. 価格は 100 円か 120 円か 150 円になるなど，起こり得る事象が特定されている場合，
2. 起こり得る事象すら特定されていない場合，

に大別される．そして，起こり得る事象が特定されている場合には，さらに

1. 各事象に対し，その確率が特定されている場合，
2. 各事象に対し，その確率が特定されていない場合，

に分けられる．このように不確実性には様々なケースがあるが，**ファイナンス論では，将来起こり得る事象が特定され，かつ，各事象の確率も特定されているモデルのみを扱う．**なお，このようなモデルを**確率モデル** (probabilistic model, stochastic model) という．確率モデルにおいて，将来起こりうる事象の全体を**標本空間** (sample space)[37] といい，Ω と記述することが多い．例えば，将来の株価が 100 円，120 円，150 円の何れかになる場合では，100 円になる事象を ω_1，120 円になる事象を ω_2，150 円になる事象を ω_3 とすれば，標本空間は

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$$

となる．そして，Ω の部分集合 A に対して，A が起こる確率を $\mathbf{P}(A)$ などと書く．$\mathbf{P}(A)$ は確率なので 0 以上 1 以下の値を取る．この $\mathbf{P}$ のことを**確率測度** (probabilityy measure) または単に**確率** (probability) と言う．例えば，$A = \{\omega_1, \omega_2\}$ であれば，$\mathbf{P}(A)$ は株価が 100 円か 120 円になる確率を表している．さらに，株価は事象の関数である．この場合であれば、株価を Ω 上の関数 X で表すと，$X(\omega_1) = 120$ となる．このような X のことを**確率変数** (random variable) という[38]．また，各取引時刻 t における株価を確率変数 X_t によって表すとき，株価は時間パラメータを持つ確率変数列によって記述

[37] 確率論に関する用語や記号の定義については補遺 A にまとめてある．
[38] この定義は正確ではない．きちんとした定義については A.1.2 節を参照のこと．

される．このような確率変数列を**確率過程** (stochastic process) といい，$\{X_t\}$ のように記述する[39)]．

結局，確率モデルを構築するとは，取引可能な資産の価格を表す確率変数または確率過程を与えることである．ここで，危険資産価格を記述する確率過程には，2.1 節で紹介する 1 期間 2 項モデルや第 4 章で扱う Black-Scholes モデルなどいくつかのフレームワークが存在する．このフレームワークの選択がモデル構築の第一段階である．これらのフレームワークは，いくつかのパラメータを用いて記述される．このパラメータの値を推定または決定するのが第二段階である．なお，パラメータは以下の 3 種類に分類される．1 つは，オプションの価格付け問題における権利行使価格や満期など，問題を設定した時点で自動的に定まるものである．次に，金利や現時点における危険資産価格のように，市場を観測すれば値を特定できるパラメータが挙げられる．最後は，観測不可能なパラメータで，過去の金融市場データから推定したり，現時点の資産価格に整合するように調整[40)]したりする必要がある．

金融実務においてはモデル選択やパラメータの推定が重要であるが，理論では与えられたモデルに対して何が言えるのかに焦点を当てる．本講義においても，1 期間 2 項モデルや Black-Scholes モデルなど具体的なモデルを設定し，オプション価格の計算方法やヘッジ手法について議論するのが主目的であり，パラメータの推定やモデル選択については深く論じない．このような実務と理論の違いを認識することは重要である．

1.3.3 完全競争的市場

この節の最後に，次章以降に登場する金融市場モデルにおいて前提となる条件をまとめておく．なお，以下で紹介する 6 つの条件を満たす市場を**完全競争的** (perfectly competitive) であるといい，本講義においては，特に断らない限り成立しているものとする:

1. 各投資家の取引高は市場全体の取引高に比べ十分小さい．よって，各投資家の取引は市場に何ら影響を与えない．なお，このような投資家を**プライステイカー** (price taker) という．
2. 市場に参加しているすべての投資家は同一の情報を持っている．
3. 株式を 0.23 株売却するなど，資産を任意に分割して取引することができる．
4. 資産の取引に際し，手数料や税金などの**取引費用** (transaction cost) は一切かからない．このような市場を**摩擦のない市場** (frictionless market) という．また，株式の取引においては配当の支払いを考慮しない．

[39)] より正確には，t の動く範囲を明示して，$\{X_t\}_{t=0,1,2,\ldots,n}$ または $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ などと記述する．なお，2 つ目は連続時間型の確率過程である．

[40)] これを**キャリブレーション** (caribration) という．

5. **空売り**[41](short sale) は無制限にできる．
6. 資金を借りることも貸すことも同一の金利で無制限に行うことができる[42]．

第 1 章　章末問題

1-1　額面 F 円，満期 n 年，クーポンレート R で半年毎にクーポンを受け取れるクーポン債を考える．この債券の現時点での価格を P とし，以下の問いに答えよ．ただし，半年複利で計算するものとする．

1. 1 回の支払いで受け取れるクーポンの額を求めよ．
2. 利回り $y > 0$ が満たす式を求めよ．
3. $R = y$ であるとき，価格 P と額面 F は等しくなることを証明せよ．

1-2　額面 F 円，満期 n 年，クーポンレート R で $1/m$ 年毎にクーポンを受け取れるクーポン債を考える．ただし，金利を $r \geq 0$ とする．

1. 1 回の支払いで受け取れるクーポンの額を求めよ．
2. この債券の現在価値 P を $1/m$ 年複利で求めよ．
3. この債券の現在価値 P を連続複利で求めよ．

1-3　金利 5% の銀行預金において，元本が 2 倍になるまで何年かかるかを年複利で計算せよ．ただし，$|x| < 0.1$ のとき $\log(1+x) \approx x$，$\log 2 \approx 0.7$ として近似計算して良い[43]．

1-4　時刻 0 で契約を行い，時刻 T で原資産 1 単位を F 円で取引する先渡契約を考える．時刻 0 における原資産 1 単位の価格を S_0，時刻 0 から T までの金利を $r \geq 0$ とし，連続複利で計算するものとする．$F > S_0 e^{rT}$ が成立しているときの裁定機会を求めよ．

---

[41] 空 (から) 売りとは，保有していない資産を売却することである．例えば，ある株式を保有していないが売却したいとき，その株式を保有している誰かから借りてきて，別の誰かにその時点での株価で売る．借りた株式は返却する必要があるが，その場合は返却時点の株価を支払えばよい．これは，保有していない資産が将来値下がりすると予測する場合に有効な手段である．

[42] 資金を貸すとは，銀行に預金することを想定している．

[43] log は自然対数である．

第2章　1期間モデルにおけるオプション価格付け理論

本章から第 4 章まで，本講義の主要トピックであるオプション価格付け理論を取り扱う．この章では，離散時間モデルの中でも 1 期間モデルについて述べる．まずは，もっとも単純なモデルである 1 期間 2 項モデルから始め，オプション価格付け理論の基礎についてじっくり議論する．ここではオプション価格付け理論の考え方に重点を置くので，確率空間などの設定を陽に出さない．さらに最後の節では，危険資産の数と起こり得る事象の数を一般化した 1 期間モデルを考える．ここでは線形代数に基づいた議論を展開する．

2.1　1期間2項モデル

この節では，最も単純な金融市場モデルである **1 期間 2 項モデル** (one-period binomial model) を紹介する．モデルの構造は極めて単純であるが，オプション価格付け理論の基本的アイデアや重要な用語の意味を理解するには十分である．第 3 章以降で紹介するより複雑なモデルを理解するためにも，この節の内容は重要である．

2.1.1　準備

1 つの危険資産と 1 つの安全資産から成る金融市場モデルを考える．この市場における取引時刻は，現在時刻である $t = 0$ と将来時刻の $T(> 0)$ のみであるとする．それ故，このモデルを **1 期間モデル** (one-period model) と呼ぶ．また，安全資産の収益率 (金利) を $r \geq 0$ と記述する．つまり，時刻 0 における安全資産の価格を 1，時刻 T の価格を $1 + r$ とする．一方，危険資産の時刻 t における価格を S_t と記述する．ここで，S_0 は正の実数，S_T は uS_0 または dS_0 の値を取るものとする．ただし，$u > d > 0$ である．つまり，このモデルでは 2 つの事象，$S_T = uS_0$ となる事象と $S_T = dS_0$ となる事象から成るモデルである．それ故，**2 項モデル** (binomial model) と呼ぶ．なお，S_T のように発生した事象に応じて値が決まる関数のことを**確率変数** (random variable) と呼ぶ[1)]．

[1)] 確率論に関する用語や記号の定義については補遺 A にまとめてある．とりわけ，確率変数については A.1.2 節や A.1.2 節を参照のこと．

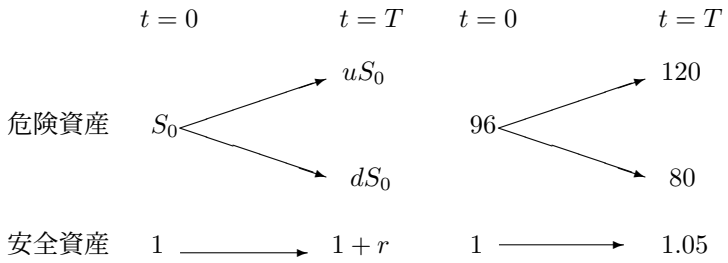


図 2.1: 1 期間 2 項モデルの価格変動 (左) と具体例 (右)

問 2.1 図 2.1 右の具体例における r, S_0, u, d の値を求めよ.

ここで権利行使価格 $K > 0$ のコールオプションを考える．言うまでもないが，このオプションの原資産は危険資産であり，満期は T である．また，1.2.2 節で紹介したように，このオプションのペイオフは

$$(S_T - K)^+ (= \max\{S_T - K, 0\} = (S_T - K) \vee 0)$$

と記述される．つまり，ペイオフ自身も $C_T = (S_T - K)^+$ と記述される確率変数である[2)]．

2.1.2 複製ポートフォリオによる価格付け

安全資産 α 単位と危険資産 β 単位から成る**ポートフォリオ**[3)](portfolio) を考える．このポートフォリオを (α, β) と記述する．なお，α や β は自然数とは限らず[4)]，負の値も含めて全ての実数を取り得るものとする．ここで，負の値を取る時は空売りを意味している．V_t をポートフォリオ (α, β) の時刻 t における価値を表す確率変数とする．つまり，

$$\begin{cases} V_0 = \alpha + \beta S_0, \\ V_T = \alpha(1+r) + \beta S_T \end{cases}$$

である．なお，2 つ目の等式は確率変数としての等式である．つまり，如何なる事象が起きても成り立つという意味であり，より具体的に言えば，S_T の値が uS_0 であっても dS_0 であっても成立していることを意味している．ここで，(α, β) が行使価格 K のコールオプションを**複製**するとは，

$$V_T = C_T$$

[2)] つまり，$S_T = uS_0$ の時は $C_T = (uS_0 - K)^+$ であり，dS_0 の時は $C_T = (dS_0 - K)^+$ である．このように C_T の値は S_T の値に依存しており，事象の関数と見なすことができる．

[3)] ポートフォリオとは，投資家が資金をいくつかの資産に分散して投資するとき，各資産の保有単位数から成るベクトルのことである．ただし，ポートフォリオは，各資産の保有金額や総資産に占める割合で表示される場合もある．なお，戦略という言葉も同じような意味で用いられるが，少なくともこの講義で戦略と言った場合，ベクトルのことではなく，どのタイミングでどのような取引を行うのかと言った投資計画の意味で用いる．

[4)] 1.3.3 節で紹介したように，市場は競争的であることを前提としている．

を満たすときに言う．これも確率変数としての等式である．これを書き直せば，複製ポートフォリオ[5]は以下の 2 元 1 次連立方程式[6]の解であることが分かる:

$$\begin{cases} \alpha(1+r) + \beta u S_0 = (uS_0 - K)^+, \\ \alpha(1+r) + \beta d S_0 = (dS_0 - K)^+. \end{cases}$$

行使価格 K のコールオプションの時刻 0 における価格 C_0 は複製ポートフォリオの初期費用 V_0 に等しい．なお，オプション価格 C_0 のことを**プレミアム**ともいう．以上まとめると以下の定理を得る:

定理 2.1 $C_0 = V_0 = \alpha + \beta S_0$.

例 2.2 図 2.1 右で与えられた 1 期間 2 項モデルと行使価格 $K = 110$ のコールオプションを考える．複製ポートフォリオ (α, β) は，連立方程式

$$\begin{cases} 1.05\alpha + 120\beta = 10, \\ 1.05\alpha + 80\beta = 0, \end{cases}$$

の解 $(\alpha, \beta) = (-\frac{20}{1.05}, \frac{1}{4})$ である．これより，オプション価格は

$$C_0 = V_0 = -\frac{20}{1.05} + \frac{1}{4} \times 96 = \frac{104}{21}$$

と計算される．

ここで定理 2.1 の証明を与えよう．そのため，**裁定機会**[7](arbitrage) を定義しておこう．

定義 2.3 ポートフォリオが裁定機会であるとは，その初期費用が 0 であり，時刻 T における価値 V_T が以下の条件を満たすときにいう:

$$\begin{cases} \mathbf{P}(V_T \geq 0) = 1, & \text{(無リスク)} \\ \mathbf{P}(V_T > 0) > 0. & \text{(収益を得られる確率が正)} \end{cases}$$

金融市場モデルを設定する際，**無裁定条件** (no-arbitrage condition) を課すのが一般的である．つまり，**取引可能な資産をどのように組み合わせても，裁定機会を構成することはできないようにモデルを設定しなければならない．**裁定機会は，損失を被る可能性がなく，場合によっては収益が得られることから，投資家のリスク選好に関わらず良い投資戦略である．従って，市場に参加しているすべての投資家は，裁定機会が存在していれば，それを採用しようとする．その結果，市場の価格調整メカニズムによって，そのような裁定機会はすぐに消滅してしまう．よって，金融市場モデルを考える際，裁定

[5] 複製戦略と呼ぶこともある．
[6] この連立方程式は常に一意解 (α, β) を持つ．
[7] この言葉はすでに 1.2.1 節で紹介しているが，ここでは数学的に定義する．

機会を含まないように設定するのが自然であると言えよう．これは大事なポイントなので，図 2.1 右において S_T の値が 120 とある箇所を 100 に変更したモデルを用いて詳しく説明しよう．この場合，時刻 0 において危険資産 1 単位を空売りし，96 円を得てそれを銀行に預けると，時刻 T における残高は 100.8 円になる．同時に，満期において空売りを精算する必要があり，事象により 100 円か 80 円を支払わなければならない．何れにせよ満期におけるキャッシュフローは正であるから，これは裁定機会となる．従って，すべての投資家は時刻 0 において危険資産を売却 (空売り) しようとするであろう．しかし，危険資産を購入しようとする投資家はいないので，価格調整メカニズムによって，96 円という価格は裁定機会が消滅するところまで瞬く間に下降する．その結果，無裁定条件は満たされるのである．

問 2.2 図 2.1 右のモデルは無裁定条件を満たしていることを示せ．(ヒント: 裁定機会 (α, β) が存在していると仮定すると，$\alpha = \beta = 0$ になることを示せば十分である．)

問 2.3 安全資産が 2 つ以上ある市場モデルは無裁定条件を満たさないことを証明せよ．

以下，これを踏まえて定理 2.1 の証明を与える．

定理 2.1 の証明. ペイオフが C_T であるオプションを考え，その価格 C_0 が与えられると，オプションは資産となる．つまり，市場は 3 資産に拡張される．よって，この拡大された 3 資産市場モデルが無裁定条件を保つように C_0 は与えられる．従って，定理 2.1 を示すには，$C_0 \neq V_0$ であるときに拡大された市場に裁定機会が存在することを示せば十分である．以下の表では $C_0 > V_0$ とした場合の裁定機会を与える．

	$t=0$	キャッシュフロー	$t=T$	キャッシュフロー
コールオプション	売却	C_0	行使	$-C_T$
危険資産	購入	$-\beta S_0$	売却	βS_T
安全資産	借入/貸付	$\beta S_0 - C_0$	支払	$(1+r)(C_0 - \beta S_0)$
合計		0		> 0

表 2.1: $C_0 > V_0$ とした場合の裁定機会

満期 T における合計のキャッシュフローは

$$\begin{aligned} &-C_T + \beta S_T + (1+r)(C_0 - \beta S_0) \\ &\quad = -C_T + \alpha(1+r) + \beta S_T + (1+r)(C_0 - \alpha - \beta S_0) \\ &\quad = -C_T + V_T + (1+r)(C_0 - V_0) = (1+r)(C_0 - V_0) > 0 \end{aligned}$$

である．ただし，(α, β) は複製ポートフォリオ，V_T はその満期での価値である．つまり，$C_T = V_T$ が成立している．また，最後の不等号は仮定 $C_0 > V_0$ による．以上より，これは裁定機会である．つまり，$C_0 > V_0$ である限り，すべての投資家はオプションを購入しようとする．ところが誰もオプションを売ってくれないので，オプション価格 C_0 は $C_0 \leq V_0$ となるところまで下降する．これが「拡大された市場に対する無裁定条件」である[8)]．

同様にして，表 2.2 は $C_0 < V_0$ とした場合の裁定機会である．満期 T におけるキャッシュフローの合計は

$$\begin{aligned} C_T - \beta S_T + (1+r)(\beta S_0 - C_0) &> C_T - \alpha(1+r) - \beta S_T + (1+r)(\alpha + \beta S_0 - C_0) \\ &= C_T - V_T + (1+r)(V_0 - C_0) > 0 \end{aligned}$$

であり，よって裁定機会になっている．故に，$C_0 \geq V_0$ が成立する．以上より，$C_0 = V_0$ を得る． □

	$t=0$	キャッシュフロー	$t=T$	キャッシュフロー
コールオプション	購入	$-C_0$	行使	C_T
危険資産	空売り	βS_0	精算	$-\beta S_T$
安全資産	借入/貸付	$-\beta S_0 + C_0$	支払	$(1+r)(\beta S_0 - C_0)$
合計		0		> 0

表 2.2: $C_0 < V_0$ とした場合の裁定機会

上記の証明において，2 つの意味で無裁定条件を用いていることに注意されたい．1 つは金融市場モデルが無裁定条件を満たしているという仮定である．つまり，無裁定条件を満たすようにモデルを設定しなければならないということである．そして 2 つ目は，オプションを追加して拡大された市場に対する無裁定条件である．こちらは仮定ではなく，無裁定になるよう価格 C_0 が決まるという意味で，無裁定条件が使われている．その意味で，このような価格付け理論を**無裁定価格理論** (no-arbitrage pricing theory) という．最後に，上記定理の最も重要な主張は，**オプション価格は複製ポートフォリオの初期費用である**ということを再度強調しておく．

プットコールパリティ ここでは，同じ行使価格を持つコールとプットの価格の間に成り立つ関係式を導く．図 2.1 左によりあたえられる 1 期間 2 項モデルに対し，行使価格 $K > 0$ のコールとプットを同時に考える．C_0 及び P_0 をそれぞれコール及びプットオプションの価格とする．このとき，以下の関係式が成立する:

$$C_0 - P_0 = S_0 - \frac{K}{1+r}, \tag{2.1.1}$$

[8)] この部分で背理法を用いていることに注意せよ．

この (2.1.1) を**プットコールパリティ**(put-call parity) と呼ぶ．これより，C_0 が求まれば P_0 もすぐに求まる．つまり，P_0 を求めるために改めてプットに対する複製ポートフォリオを計算する必要はないのである．

それでは，(2.1.1) を証明しよう．2 つのオプションを考えるので，市場は 4 資産モデルに拡張される．そこで表 2.3 のような 4 資産ポートフォリオを考える．満期におけるキャッシュフローの合計は

$$-C_T + P_T + S_T - K = -(S_T - K)^+ + (K - S_T)^+ + S_T - K = 0$$

となる．この式は，S_T の値に依らず成立している．従って，無裁定条件より上記の戦略の初期費用は 0 である．つまり，

$$C_0 - P_0 - S_0 + \frac{K}{1+r} = 0$$

が成立するはずである．以上より，(2.1.1) が成り立つ． □

	$t=0$	キャッシュフロー	$t=T$	キャッシュフロー
コールオプション	売却	C_0	行使	$-C_T$
プットオプション	購入	$-P_0$	行使	P_T
危険資産	購入	$-S_0$	売却	S_T
安全資産	借入	$\frac{K}{1+r}$	支払	$-K$

表 2.3: 4 資産ポートフォリオ

2.1.3 マルチンゲール確率

複製ポートフォリオを構築する際，S_T の確率分布，つまり，確率 $\mathbf{P}(S_T = uS_0)$ 及び $\mathbf{P}(S_T = dS_0)$ は一切登場しなかった．そこで，オプション価格を計算するために，S_T の確率分布を都合の良いものに置き換えることを考える．

記号をいくつか準備する．まず，$p := \mathbf{P}(S_T = uS_0)$ とする．このとき，$0 < p < 1$ であり，$\mathbf{P}(S_T = dS_0) = 1 - p$ であることに注意せよ．そして，確率 p を新たな確率 q に置き換える[9]．また，(確率を置き換える前の)S_T の期待値 $\mathbf{E}[S_T]$ は

$$\mathbf{E}[S_T] = puS_0 + (1-p)dS_0$$

である[10]が，確率を変更すれば期待値も変わる．そこで，確率 q の下での期待値を $\mathbf{E}_q$ とすれば，

$$\mathbf{E}_q[S_T] = quS_0 + (1-q)dS_0$$

[9] 数学的には，p を q に置き換えるのではなく，新たな確率測度 $\mathbf{Q}$ を考え，$q := \mathbf{Q}(S_T = uS_0)$ と定義すると考えるのが正しい．
[10] A.1.2 節参照．

が成立する．

それでは，q が「都合の良い」確率であるとは，どういうことであろうか? 実は，危険資産価格 S_T に対して

$$S_0 = \frac{1}{1+r}\mathbf{E}_q[S_T], \tag{2.1.2}$$

が成立するような q を用いると，オプション価格の計算が簡単になるのである．何故ならば，ペイオフが C_T であるオプションとその複製戦略 (α, β) に対して，$C_T = \alpha(1+r) + \beta S_T$ であるから，期待値の線形性より

$$\mathbf{E}_q[C_T] = \mathbf{E}_q[\alpha(1+r) + \beta S_T] = \alpha(1+r) + \beta\mathbf{E}_q[S_T]$$

が成立する．また，$C_0 = \alpha + \beta S_0$ であるから, (2.1.2) より

$$C_0 = \frac{1}{1+r}\mathbf{E}_q[C_T]. \tag{2.1.3}$$

が成り立つのである．ここで，(2.1.2) の意味を考えると，右辺は危険資産価格の割引現在価値[11)]の確率 q の下での期待値であり，それが現在時刻の危険資産価格に等しくなっている．一般に，将来時点の期待値が現在時刻の値に等しくなる確率過程を**マルチンゲール** (martingale) という．q は，危険資産の割引現在価値をマルチンゲールにする確率であることから，**マルチンゲール確率** (martingale probability) または**リスク中立確率**（risk neutral probability) と呼ばれる[12)]これまでに得られた結果を定理としてまとめておこう．

定理 2.4 ペイオフが C_T であるオプションの価格 C_0 は，マルチンゲール確率 q を用いて，(2.1.3) によって与えられる．

例 2.5 図 2.1 右 (例 2.2) のモデルを考えよう．まず，マルチンゲール確率 q は

$$96 = \frac{120}{1.05}q + \frac{80}{1.05}(1-q)$$

を満たすので，これを解くと $q = 0.52$ を得る．よって，行使価格 110 のコールオプションの価格 C_0 は，(2.1.3) より

$$C_0 = \frac{1}{1.05}(10 \times 0.52 + 0 \times 0.48) = \frac{5.2}{1.05} = \frac{104}{21}.$$

となる．

これまで見てきたように，オプション価格の計算には 2 通りの方法がある．1 つは複製ポートフォリオの初期費用であり，もう 1 つは**ペイオフの割引現在価値のマルチンゲール確率における期待値**である．マルチンゲール確率を用いた方法は，多くのオプションの価格を計算する必要がある場合に有効である．何故ならば，一旦マルチンゲール確率を求めておけば，あとは期待値を計算するだけでオプション価格が次々に得られるからである．

---

11) $\frac{1}{1+r}$ は割引率である．

12) 無裁定条件を満たす 1 期間 2 項モデルにおいて，マルチンゲール確率は一意に存在する．これについては次の小節で詳しく論じる

2.2　資産価格理論の基本定理

これまで市場モデルは無裁定条件を満たすことを前提に議論してきた．この節では，いかなる場合に 1 期間 2 項モデルが無裁定になるのか，さらには，オプション価格を計算する際に必要となるマルチンゲール確率や複製ポートフォリオの存在と無裁定条件との関係について述べた**資産価格理論の基本定理** (fundamental theorems of asset pricing, FTAP) を紹介する．なお，基本定理は第一定理と第二定理から成り，次の小節ではまず第一定理を証明する．また，この節では 1 期間 2 項モデルに対する基本定理を紹介するが，基本定理はより一般のモデルでも成立する．

2.2.1　第一基本定理

以下のように，図 2.1 左で与えられたものと同じ 1 期間 2 項モデルを考える．なお，$S_0 > 0$, $u > d > 0$, $r \geq 0$ とする．

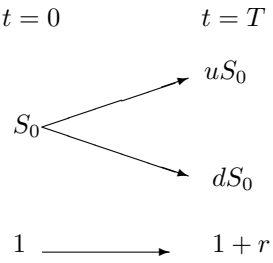


図 2.2: 1 期間 2 項モデル

このモデルに対し，以下の第一基本定理を証明する．

定理 2.6 (資産価格理論の第一基本定理 (1st FTAP)) 無裁定条件を満たすことと，マルチンゲール確率が存在することは同値である．

証明.　まず，$u \leq 1 + r$ であるとする．このとき，以下のように市場には裁定機会が存在する．時刻 0 において，投資家は危険資産 1 単位を空売りし，S_0 単位の安全資産を購入する[13)]．時刻 0 におけるキャッシュフローは 0 であることに注意せよ．そして，満期 T において，空売りを精算し，安全資産を売却[14)]すれば，キャッシュフローの合計は

$$(1+r)S_0 - S_T = \begin{cases} (1+r)S_0 - uS_0 \geq 0, & S_T = uS_0 \text{ であるとき}, \\ (1+r)S_0 - dS_0 > 0, & S_T = dS_0 \text{ であるとき}, \end{cases}$$

[13)] S_0 円銀行に預金すると考えても良い．
[14)] 預金を降ろすという意味．

となり，いずれにせよキャッシュフローは非負であり，$S_T = dS_0$ であるとき正である．つまり，この戦略は裁定機会である．一方，$d < u \leq 1+r$ であるから，任意の $q \in (0,1)$ に対して，

$$\frac{1}{1+r}(quS_0 + (1-q)dS_0) < \frac{1}{1+r}(q(1+r)S_0 + (1-q)(1+r)S_0) = S_0$$

が成立する．つまり，マルチンゲール確率は存在しない．

$d \geq 1+r$ である場合についても，上記と同様の議論により，裁定機会を構築することができ，さらにマルチンゲール確率が存在しないことも示せる．

問 2.4 この事実を証明せよ．

最後に $u > 1+r > d$ となる場合を考察しよう．裁定機会 (α, β) が存在するものと仮定する．このとき，裁定機会の定義より

$$\begin{cases} \alpha + \beta S_0 = 0, \\ \alpha(1+r) + \beta u S_0 \geq 0, \\ \alpha(1+r) + \beta d S_0 \geq 0, \\ 2 \text{ つの不等式のうち少なくともどちらかでは} > \text{が成立している．} \end{cases}$$

1 行目より $\alpha = -\beta S_0$ であり，これを 2 行目に代入すると

$$-(1+r)\beta S_0 + \beta u S_0 = \beta S_0(u-1-r) \geq 0$$

を得る．$u-1-r > 0$ であるから $\beta \geq 0$ となる．一方，$d-1-r < 0$ に注意すると，3 行目より $\beta \leq 0$ を得る．結局，$\beta = 0$ となるが，これより $\alpha = \beta = 0$ となり，(α, β) が裁定機会であることに矛盾する．従って，市場は無裁定となる．また，

$$q := \frac{1+r-d}{u-d},$$

とおくと，$q \in (0,1)$ であり，この q がマルチンゲール確率であることも確認できる．以上より，定理 2.6 は示された． □

定理 2.6 の証明より，**1 期間 2 項モデルが無裁定条件を満たすことの必要十分条件は $u > 1+r > d$ であるこ**とが分かる．例えば，$d \geq 1+r$ であるならば，借金をして危険資産を購入すれば裁定機会が得られるので，どんな投資家も危険資産を購入しようとする．しかし，この状況では誰も危険資産を売却しようとはしないので，S_0 は上昇し，$d \geq 1+r$ は成立しなくなる．従って，$d \geq 1+r$ が成立している 1 期間 2 項モデルは不自然であるといえる．今後，1 期間 2 項モデルにおいて，$u > 1+r > d$ は常に成立しているものとする．

問 2.5 実は定理 2.1 の証明はまだ不完全である．何故ならば，$C_0 = V_0$ であるとき拡大された 3 資産市場が無裁定になることを確認していないからである．$u > 1+r > d$ の下，3 資産市場が無裁定であることを確認せよ．

2.2.2　第二基本定理

第一基本定理によって，市場モデルの無裁定条件とマルチンゲール確率の存在が同値であることが示された．しかし，オプション価格を計算するためにはまだ不十分である．何故ならば，(2.1.3) を用いてオプション価格を計算すると，マルチンゲール確率が複数存在するときオプション価格は一意に定まらないからである．また，複製ポートフォリオを用いてオプション価格を求めようとしても，そもそも複製ポートフォリオの存在が保証されていない．このような観点から，この小節で述べる第二基本定理が重要となる．まず，以下の定義を与える．

定義 2.7 市場が**完備** (complete) であるとは，取引可能なすべてのオプションが**複製可能** (replicable) であるときに言う．

実際，**無裁定条件を満たす 1 期間 2 項モデルは完備である．**この事実を証明しよう．以下の 1 期間 2 項モデルとオプションを考える．言うまでもなく，$0 < d < 1 + r < u$, $r \geq 0$, $S_0 > 0$ が成立しているものとする．また，C_u 及び C_d は，それぞれ $S_T = uS_0$，dS_0 であるときのオプションのペイオフである．

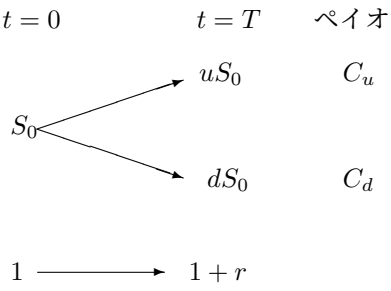


図 2.3: 1 期間 2 項モデルとオプションペイオフ

ここでの目標は，任意のオプションが複製可能であることを示すことである．つまり，任意の 2 次元ベクトル (C_u, C_d) に対して，以下の連立方程式が解 (α, β) を持つことを満せば良い:

$$\begin{cases} \alpha(1+r) + \beta uS = C_u, \\ \alpha(1+r) + \beta dS = C_d. \end{cases}$$

しかし，$u \neq d$，$S_0 > 0$ であるから，これは解を持ち，

$$\alpha = \frac{1}{1+r}\frac{uC_d - dC_u}{u-d}, \quad \beta = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S_0}$$

となる．従って，すべての取引可能なオプションは複製ポートフォリオを持つ，つまり，市場は完備である．

一方，第一基本定理より，無裁定 1 期間 2 項モデルにおいてはマルチンゲール確率が存在する．それを q と書くと，

$$\frac{1}{1+r}(quS_0 + (1-q)dS_0) = S_0$$

が成立する．これは q に関する線形方程式なので，解 q は一意である．つまり，マルチンゲール確率の一意性が成立する．ここまでの議論をまとめたものが以下の第二基本定理である．

定理 2.8 (資産価格理論の第二基本定理 (2nd FTAP)) 市場が無裁定条件を満たすとき，完備であることとマルチンゲール確率が一意であることは同値である．

無裁定 1 期間 2 項モデルは完備であるから，あらゆるオプションは複製可能である．よって，複製ポートフォリオの初期費用によってオプション価格を計算することができる．また，第二基本定理よりマルチンゲール確率の一意性が保証されており，マルチンゲール確率を用いた方法でも，オプション価格を一意に定めることができる．一方，完備でない市場では，複製ポートフォリオの存在が保証されておらず，複製ポートフォリオの初期費用によるオプション価格の導出は不可能である．また，マルチンゲール確率を用いてオプション価格を計算することは可能であるが，一意に定めることができない．ここでは完備でない市場の例として，以下のような **1 期間 3 項モデル** (trinomial model) を考える．

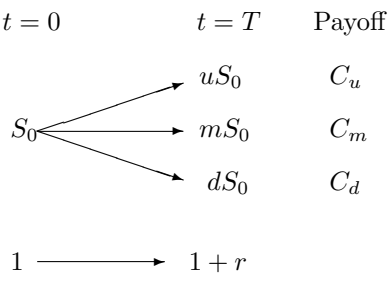


図 2.4: 1 期間 3 項モデルとオプションペイオフ

ただし，$u > m > d > 0, S_0 > 0$ 及び $r \geq 0$ であるとする．なお，$u > 1+r > d$ である限り，このモデルは無裁定条件を満たす．ペイオフが C_u, C_m, C_d であるオプションの複製戦略を (α, β) とする．これは以下の連立方程式の解である:

$$\begin{cases} \alpha(1+r) + \beta u S_0 = C_u, \\ \alpha(1+r) + \beta m S_0 = C_m, \\ \alpha(1+r) + \beta d S_0 = C_d. \end{cases}$$

この連立方程式は，方程式の数が 3 で未知数の数が 2 であるから，一般に解を持たない．つまり，複製ポートフォリオは存在しない．よって，1 期間 3 項

モデルは非完備であり，第二基本定理 (定理 2.8) からマルチンゲール確率が複数存在する．実際には以下で示すように無限個存在する．

まず，1 期間 3 項モデルにおけるマルチンゲール確率は 3 次元ベクトル (q_u, q_m, q_d) で与えられる[15]．ただし，$k = u, m, d$ に対して，q_k は $S_T = kS_0$ となる確率であり，$0 < q_k < 1$ かつ $q_u + q_m + q_d = 1$ を満たす．このとき，

$$\frac{1}{1+r}(q_u u S_0 + q_m m S_0 + q_d d S_0) = S_0$$

が成立する．これを書き換えれば，連立方程式

$$\begin{cases} q_u \dfrac{u-d}{1+r-d} + q_m \dfrac{m-d}{1+r-d} = 1, \\ q_d = 1 - q_u - q_m \end{cases}$$

を得る．この連立方程式は無限個の解を持つので，マルチンゲール確率も無限個存在する．

無裁定価格と優ヘッジコスト 無裁定非完備モデルにおいて，オプションの無裁定価格，つまり，オプションを加えた拡大市場モデルが無裁定条件を満たすようなオプション価格の全体は開区間を構成する．$\mathcal{Q}$ をマルチンゲール確率の全体としよう．任意の $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$ に対して[16]，$C_0^{\mathbf{q}} := \dfrac{1}{1+r}\mathbf{E}_{\mathbf{q}}[C_T]$ はオプション C_T の無裁定価格を与える．つまり，オプション価格が $C_0^{\mathbf{q}}$ であるとき，危険資産，安全資産，オプションの 3 資産モデルは無裁定条件を満たす．従って，どのような 3 資産ポートフォリオを選択しても，損失を被る可能性も利益を得られる可能性もある．一方，もし $C_0 \in \mathbb{R}$[17]が無裁定価格であるならば，あるマルチンゲール確率 $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$ が存在して，$C_0 = \dfrac{1}{1+r}\mathbf{E}_{\mathbf{q}}[C_T]$ が成立する．よって，無裁定価格の全体は開区間

$$\left(\inf_{\mathbf{q}\in\mathcal{Q}} \frac{1}{1+r}\mathbf{E}_{\mathbf{q}}[C_T], \sup_{\mathbf{q}\in\mathcal{Q}} \frac{1}{1+r}\mathbf{E}_{\mathbf{q}}[C_T] \right),$$

により与えられる．なお，オプション価格 C_0 がこの開区間の右端より大きいとき，つまり $C_0 \geq \sup_{\mathbf{q}\in\mathcal{Q}} \dfrac{1}{1+r}\mathbf{E}_{\mathbf{q}}[C_T]$ であるとき，投資家はオプションを C_0 で売却することで，裁定機会を得ることができる．この開区間の右端の値を**優ヘッジコスト** (superhedging cost) という． □

2.3 一般化された 1 期間モデル

この節では，危険資産の数と起こり得る事象の数を一般化した 1 期間モデルに対するオプション価格付け理論を紹介する．ここでは，危険資産価格を

[15] マルチンゲール確率は，起こる得る事象の数と同じ次元のベクトルで記述できる．

[16] 上記にあるようにマルチンゲール確率はベクトルで記述できる．さらに，ベクトルとスカラーを区別するため，この講義ノートではベクトルを太文字で表す．

[17] $\mathbb{R}$ は実数全体の集合である．

行列で，ポートフォリオやマルチンゲール確率をベクトルで表現し，線形代数学を用いて資産価格理論の基本定理の証明を与えることを目標とする．

2.3.1 モデルの記述

$N(\geq 2)$ 個の資産が取引可能な 1 期間モデルを考える．つまり，1 つの安全資産と $N-1$ 個の危険資産から成る市場を考える[18]．このモデルの標本空間 Ω を以下のように記述する:

$$\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_M\}.$$

任意の $j = 1, \cdots, M$ に対して $\mathbf{P}(\{\omega_j\}) > 0$ であると仮定しても一般性を失うことはない．ここで，任意の $i = 1, \cdots, N$ と $j = 1, \cdots, M$ に対して，事象 ω_j が起きたときの満期 T における第 i 資産の価格を $S_T^i(\omega_j)$ と記述する．なお，第 1 資産は安全資産で，時刻 0 における価格を $S_0^1 = 1$ とし，満期における価格を，任意の $j = 1, \cdots, M$ に対して $S_T^1(\omega_j) = 1 + r$ とする．ただし，$r \geq 0$ はこの市場の金利である．一方，任意の $i = 2, \cdots, N$ に対して，第 i 資産の時刻 0 における価格 S_0^i は正定数である．ここで，初期時刻における資産価格ベクトルを

$$\mathbf{S}_0 = (1, S_0^2, \cdots, S_0^N)^\top,$$

と記述する[19]．ただし，$^\top$ はベクトルの転置を表す．つまり，$\mathbf{S}_0$ は N 次元列ベクトル (N-dimensional column vector)[20]である．また，満期における資産価格を表す $N \times M$ 行列 (N-by-M matrix)D を以下のように定義する:

$$\begin{aligned} D &:= \begin{pmatrix} S_T^1(\omega_1) & S_T^1(\omega_2) & \cdots & S_T^1(\omega_M) \\ S_T^2(\omega_1) & S_T^2(\omega_2) & \cdots & S_T^2(\omega_M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_T^N(\omega_1) & S_T^N(\omega_2) & \cdots & S_T^N(\omega_M) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+r & 1+r & \cdots & 1+r \\ S_T^2(\omega_1) & S_T^2(\omega_2) & \cdots & S_T^2(\omega_M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_T^N(\omega_1) & S_T^N(\omega_2) & \cdots & S_T^N(\omega_M) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

一方，ポートフォリオは N 次元の行ベクトル (row vector) $\mathbf{x} = (x^1, \cdots, x^N)$ で表される．ここで，各 x^i は，投資家が時刻 0 から満期 T まで保有する第 i 資産の保有量を表している．ポートフォリオ $\mathbf{x}$ の価値を表す確率過程を $\{V_t^{\mathbf{x}}\}$

[18] 安全資産が 2 つ以上存在すると，市場は無裁定条件を満たさない．
[19] ベクトルは太字で表す．
[20] この節では，線形代数に関する用語の英訳も紹介する．

とすれば,

$$\begin{cases} V_0^{\mathbf{x}} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{S}_0 = \sum_{i=1}^N x^i S_0^i, \\ V_T^{\mathbf{x}}(\omega_j) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{d}^{\omega_j} = \sum_{i=1}^N x^i S_T^i(\omega_j), \quad j = 1,\cdots,M, \end{cases}$$

となる．ただし，$\mathbf{x}\cdot\mathbf{S}_0$ はベクトル $\mathbf{x}$ と $\mathbf{S}_0$ の内積 (inner product) であり，$\mathbf{d}^{\omega_j} := (S_T^1(\omega_j),\cdots,S_T^N(\omega_j))^\top$ である．また，ベクトル $\mathbf{V}_T^{\mathbf{x}}$ を

$$\mathbf{V}_T^{\mathbf{x}} := (V_T^{\mathbf{x}}(\omega_1),\cdots,V_T^{\mathbf{x}}(\omega_M)) \tag{2.3.1}$$

と定義する．このとき，$\mathbf{V}_T^{\mathbf{x}} = \mathbf{x}D$ となる．また，$\mathbf{d}^{\omega_j}$ を用いて行列 D を以下のように表現することもできる:

$$D = \begin{pmatrix} \mathbf{d}^{\omega_1} & \cdots & \mathbf{d}^{\omega_M} \end{pmatrix}.$$

さらに 3 点ほど準備を追加しよう．ポートフォリオ $\mathbf{x}$ が裁定機会であるとは,

$$\begin{cases} \mathbf{x}\cdot\mathbf{S}_0 = 0, & \text{(初期費用 0)} \\ \mathbf{P}(V_T^{\mathbf{x}} \geq 0) = 1, & \text{(無リスク)} \\ \mathbf{P}(V_T^{\mathbf{x}} > 0) > 0, & \text{(収益を得られる確率が正)} \end{cases}$$

を満たすときにいう．なお，2 つ目と 3 つ目の条件は，それぞれ

$$\begin{cases} \text{任意の } j \in \{1,\cdots,M\} \text{ に対して, } V_T^{\mathbf{x}}(\omega_j) \geq 0, \\ \text{ある } j \in \{1,\cdots,M\} \text{ が存在し, } V_T^{\mathbf{x}}(\omega_j) > 0, \end{cases} \tag{2.3.2}$$

と書き換えられることに注意しよう．また，後の議論のために，割引価格行列 $\widehat{D}$ を

$$\widehat{D} := \frac{1}{1+r}D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{S_T^2(\omega_1)}{1+r} & \frac{S_T^2(\omega_2)}{1+r} & \cdots & \frac{S_T^2(\omega_M)}{1+r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{S_T^N(\omega_1)}{1+r} & \frac{S_T^N(\omega_2)}{1+r} & \cdots & \frac{S_T^N(\omega_M)}{1+r} \end{pmatrix} \tag{2.3.3}$$

と定義する．最後に，確率 $\mathbf{Q}$ がマルチンゲール確率であるとは,

1. 任意の $j \in \{1,\cdots,M\}$ に対して，$\mathbf{Q}(\{\omega_j\}) > 0$,
2. 任意の $i \in \{1,\cdots,N\}$ に対して，$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left[\dfrac{S_T^i}{1+r}\right] = S_0^i$

を満たすときにいう.

全称記号と存在記号 (2.3.2) にある 2 つの命題を英語で書き直してみると,

$$\begin{cases} \text{for all } j \in \{1,\cdots,M\},\ V_T^{\mathbf{x}}(\omega_j) \geq 0, \\ \text{there exists a } j \in \{1,\cdots,M\} \text{ such that } V_T^{\mathbf{x}}(\omega_j) > 0, \end{cases} \tag{2.3.4}$$

となる[21]．さらに,「for all」と「there exists」の部分をそれぞれ全称記号 $\forall$ と存在記号 $\exists$ に置き換えて

$$\begin{cases} \forall j \in \{1, \cdots, M\}, V_T^{\mathbf{x}}(\omega_j) \geq 0, \\ \exists j \in \{1, \cdots, M\}, V_T^{\mathbf{x}}(\omega_j) > 0, \end{cases}$$

と書くこともできる．なお，2 つ目の命題の中間にある「,」は「such that」を意味しており，それを強調するために「;」を用いたり,「s.t.」と表したりすることもある．ここで「there exists」から始まる英文は,

$$V_T^{\mathbf{x}}(\omega_j) > 0 \text{ を満たす } j \in \{1, \cdots, M\} \text{ が存在する} \tag{2.3.5}$$

と訳す方が自然であり，(2.3.2) にある表現は，英語の語順とは適合しているものの日本語としては不自然である．しかし，(2.3.5) のような書き方では，文頭の ω_j の j は未定義の場合があり，数学の命題としては不適切である．従って，存在記号が含まれる命題を日本語で表現する場合，(2.3.2) のように表現するのが一般的である．

数学的議論を行うに際し，全称記号や存在記号を用いた表現に慣れておくと何かと便利である．とりわけ，背理法を用いた証明では否定命題を書き下す必要があり，その際には大いに役立つであろう． □

2.3.2 第一基本定理

この小節では，前小節で述べた一般化された 1 期間モデルに対する資産価格理論の第一基本定理を証明する．いきなりであるが，定理を述べよう．

定理 2.9 (資産価格理論の第一基本定理) 一般化された 1 期間モデルが無裁定条件を満たすことと，マルチンゲール確率が存在することは同値である．

定理の証明に入る前に補題を 1 つ準備しよう．なお，以下の補題は，純粋に線形代数学に関する結果である．

補題 2.10 (Farkas の補題) A を $n \times m$ 行列，$\mathbf{b}$ を n 次元列ベクトルとする．このとき，以下の 2 つの問題のうちどちらか一方は解を持ち，かつ，一方のみ解を持つ:

問題 1 以下を満たす非負の m 次元列ベクトル[22]$\mathbf{u}$ が存在する:

$$\mathbf{b} = A\mathbf{u} \tag{2.3.6}$$

---

[21] $$\begin{cases} V_T^{\mathbf{x}}(\omega_j) \geq 0 \text{ for any } j \in \{1, \cdots, M\}, \\ V_T^{\mathbf{x}}(\omega_j) > 0 \text{ for some } j \in \{1, \cdots, M\}, \end{cases}$$
のように any と some を用いて記述することもできる．

[22] ベクトルが非負であるとは，すべての要素が非負であるときにいう．

問題 2 以下を満たす n 次元行ベクトル $\mathbf{v}$ が存在する:

$$\begin{cases} \mathbf{v}\cdot\mathbf{b} < 0 \\ \mathbf{v}A \geq \mathbf{0},\ \text{つまり},\ \mathbf{v}A \text{は非負 } m \text{ 次元行ベクトルである}. \end{cases} \tag{2.3.7}$$

ただし，$\mathbf{0}$ はすべての要素が 0 である零ベクトルである[23)]．

補題 2.10 の証明. この証明は長いので，いくつかのステップに分ける．

ステップ 1: ここでは，必要な記号を準備し，問題 1 及び 2 を分かりやすい形に書き換える．まず，$j = 1, \cdots, m$ に対して，A の第 j 列を $\mathbf{a}^j$ と記述する．つまり，

$$A = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}^2 & \cdots & \mathbf{a}^m \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$$

と記述する．ここで，各 $\mathbf{a}^j$ は n 次元列ベクトルである．a_{ij} を A の (i,j) 成分とすると，ベクトル $\mathbf{a}^j$ は $\mathbf{a}^j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj})^\top$ となる．そこで，$\mathbf{a}^j$ を用いて $A\mathbf{u}$ を表すと，$\mathbf{u} = (u_1, \cdots, u_m)^\top$ とすれば,

$$A\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \cdots + a_{1m}u_m \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{2m}u_m \\ \vdots \\ a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \cdots + a_{nm}u_m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j}u_j \\ \sum_{j=1}^m a_{2j}u_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj}u_j \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^m u_j \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^m u_j \mathbf{a}^j$$

となる．よって，問題 1 における (2.3.6) は

$$\mathbf{b} = \sum_{j=1}^m u_j \mathbf{a}^j \tag{2.3.8}$$

となる．

次に,

$$\mathbf{v}A = \mathbf{v}\begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}^2 & \cdots & \mathbf{a}^m \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} = \left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}^1, \mathbf{v}\cdot\mathbf{a}^2, \cdots, \mathbf{v}\cdot\mathbf{a}^m\right)$$

であるから，問題 2 の (2.3.7) を

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{b} < 0, \quad j = 1, \cdots, m \text{ に対して } \mathbf{v}\cdot\mathbf{a}^j \geq 0$$

[23)] $\mathbf{0}$ と 0 は違うので注意せよ.

と書き換えることができる．

最後に，

$$K := \left\{ \sum_{j=1}^{m} c_j \mathbf{a}^j \;\middle|\; c_1 \geq 0, c_2 \geq 0 \cdots, c_m \geq 0 \right\}$$

と定義する．なお，K は n 次元列ベクトルの集合で**凸錐** (convex cone) である．特に，K は $\mathbf{a}^1, \cdots, \mathbf{a}^m$ 及び零ベクトル $\mathbf{0}$ を含んでいる．

注意 2.11 (凸と錐) ベクトルから成る集合 V が**凸** (convex) であるとは，$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2 \in V$ ならば，任意の $\alpha \in [0,1]$ に対して，$\alpha\mathbf{v}_1 + (1-\alpha)\mathbf{v}_2 \in V$ であるときにいう．また，V が**錐** (cone) であるとは，$\mathbf{v} \in V$ ならば，任意の $c \geq 0$[24] に対して，$c\mathbf{v} \in V$ であるときにいう． □

問 2.6 K が凸錐であることを確認せよ．

ステップ 2: $\mathbf{b} \in K$ である場合について議論しよう．このとき，以下を満たす係数 $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0 \cdots, c_m \geq 0$ が存在する:

$$\mathbf{b} = \sum_{j=1}^{m} c_j \mathbf{a}^j.$$

つまり，(2.3.8) より $\mathbf{c} := (c_1, c_2, \cdots, c_m)^\top$ は問題 1 の解である．一方，n 次元行ベクトル $\mathbf{v}$ で $\mathbf{v}A \geq \mathbf{0}$ を満たすものを任意に取ってくる．つまり，$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^j \geq 0$ が任意の $j \in \{1, \cdots, m\}$ に対して成立している．このとき，

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{v} \cdot \sum_{j=1}^{m} c_j \mathbf{a}^j = \sum_{j=1}^{m} c_j \left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^j \right) \geq 0$$

である．よって，そのようなベクトル $\mathbf{v}$ は問題 2 の解ではない．故に，$\mathbf{b} \in K$ である限り問題 2 の解は存在しない．

ステップ 3: 最後に $\mathbf{b} \notin K$ となる場合について考察する．明らかに，このケースでは問題 1 は解を持たない．一方，注意 2.12 で述べる凸集合に対する**分離定理** (separation theorem) より，$\mathbf{b}$ と K を分離する超平面 H が存在する．つまり，ベクトル $\mathbf{v}$ が存在して[25]，$\mathbf{v} \cdot \mathbf{b} < 0$ 及び，任意の $\mathbf{k} \in K$ に対して，$\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} \geq 0$ を満たす[26]．従って，$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^j \geq 0$ がすべての $j \in \{1, \cdots, m\}$ に対して成り立つ．つまり，$\mathbf{v}$ は問題 2 の解である．これより，補題 2.10 は成り立つ． □

---

[24] 0 を除いて $c > 0$ とする流儀もある．

[25] 実際，このような $\mathbf{v}$ としては，K に属する点の中で $\mathbf{b}$ に最も近い点を $\mathbf{b}_K$ として，$\mathbf{v} = \mathbf{b}_K - \mathbf{b}$ と取れば良い．

[26] $\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} \geq 0$ は $\mathbf{v}$ と $\mathbf{k}$ のなす角が鋭角であることを意味し，$\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} < 0$ は鈍角であることを意味する．

注意 2.12 (凸集合に対する分離定理) 集合 $H \subset \mathbb{R}^n$ が**超平面** (hyperplane) であるとは，ある $\alpha \in \mathbb{R}$ と $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = \alpha\}$$

を満たすときにいう．分離定理[27]は，任意の (閉) 凸集合 K と任意のベクトル $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \backslash K$ に対して，K と $\mathbf{b}$ を分離する超平面 H が存在することを主張する．つまり，$\alpha \in \mathbb{R}$ と $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ が存在し，$K \subset \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} > \alpha\}$ と $\mathbf{b} \in \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} < \alpha\}$ が成立する．特に，K が凸錘であるときは，任意のベクトル $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \backslash K$ に対して，$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ を上手く選んで，$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0\}$ とすれば，この H によって凸集合 $K \backslash \{\mathbf{0}\}$ とベクトル $\mathbf{b}$ は分離される．このとき，$\mathbf{v}$ は H の**法線ベクトル** (normal vector) になっている． □

定理 2.9 の証明. 定理 2.9 を示そう．まず，市場が無裁定であることと，以下の条件を満たす N 次元行ベクトル $\mathbf{x}$ が存在しないことは同値である:

$$\begin{cases} \mathbf{x} \cdot \mathbf{S}_0 = 0, & (\text{初期費用 } 0) \\ \mathbf{x}\widehat{D} \text{は非負，つまり}, \forall j \in \{1, \cdots, M\}, (\mathbf{x}\widehat{D})_j \geq 0, & (\text{無リスク}) \\ \text{ある } j \in \{1, \cdots, M\} \text{ が存在し}, (\mathbf{x}\widehat{D})_j > 0. & (\text{収益が得られる確率が正}) \end{cases} \tag{2.3.9}$$

$\mathbf{1} := (1, \cdots, 1)^\top$ (M 次元ベクトル) とすれば，(2.3.9) を以下のように書き換えることができる:

$$\begin{cases} \mathbf{x} \cdot \mathbf{S}_0 = 0, \\ \mathbf{x}\widehat{D} \geq \mathbf{0}, \\ \mathbf{x}\widehat{D} \cdot \mathbf{1} > 0. \end{cases}$$

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{S}_0 = 0$ と，「$\mathbf{x} \cdot \mathbf{S}_0 \geq 0$ かつ $\mathbf{x} \cdot (-\mathbf{S}_0) \geq 0$」は同値であるから，

$$\begin{cases} \overline{D} := \begin{pmatrix} \widehat{D} & \mathbf{S}_0 & -\mathbf{S}_0 \end{pmatrix}, & (N \times (M+2) \text{ 行列}) \\ \mathbf{d} := -\widehat{D}\mathbf{1}, & (N \text{ 次元列ベクトル}) \end{cases}$$

と定義すると，問題

$$\begin{cases} \mathbf{x}\overline{D} \geq \mathbf{0}, \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{d} < 0 \end{cases}$$

が解 $\mathbf{x}$ を持たないことは，無裁定条件に対する必要十分条件である．

問 2.7 このことを確認せよ．

ここで補題 2.10 より，$\mathbf{d} = \overline{D}\mathbf{u}$ を満たす非負 $(M+2)$ 次元列ベクトル $\mathbf{u}$ が存在することと無裁定条件は同値であることが分かる．今，

$$\boldsymbol{\beta} := (u_1, \cdots, u_M)^\top, \quad \text{及び} \quad \alpha := u_{M+2} - u_{M+1}$$

[27] 本講義では証明を与えない．興味があれば [12, 丸山] を参照せよ．

と定義する．ただし，$\mathbf{u} = (u_1, \cdots, u_M, u_{M+1}, u_{M+2})^\top$ である．このとき，

$$\mathbf{d} = \widehat{D}\boldsymbol{\beta} - \alpha \mathbf{S}_0,$$

つまり，

$$-\widehat{D}\mathbf{1} = \widehat{D}\boldsymbol{\beta} - \alpha \mathbf{S}_0$$

となる．これは

$$\alpha \mathbf{S}_0 = \widehat{D}(\boldsymbol{\beta} + \mathbf{1})$$

と書き換えられる．ここで，$\boldsymbol{\beta}$ は非負ベクトルであることに注意すると，$\mathbf{S}_0$ の第 1 成分は 1 で，$\widehat{D}$ の 1 行目は $\mathbf{1}$ であるから，

$$\alpha = \sum_{j=1}^{M} (u_j + 1) > 0$$

を得る．従って，各 $j \in \{1, \cdots, M\}$ に対して

$$q_j := \frac{1}{\alpha}(u_j + 1)$$

とおくと，$q_j > 0$ であり，$\displaystyle\sum_{j=1}^{M} q_j = 1$ となる．さらに，$\mathbf{q} := (q_1, \cdots, q_M)^\top$ は

$$\mathbf{S}_0 = \widehat{D}\mathbf{q}$$

を満たすから，以下のように $\mathbf{q}$ を用いてマルチンゲール確率 $\mathbf{Q}$ を定義できる:

$$\mathbf{Q}(\{\omega_j\}) = q_j, \quad j = 1, \cdots, M.$$

これより，定理 2.9 は成立する． □

2.3.3 第二基本定理

この小節では，一般化された 1 期間モデルにおける第二基本定理を証明する．どんなオプションも，そのペイオフは Ω 上に定義された確率変数によって与えられ，かつ，任意の Ω 上の確率変数に対し，それをペイオフとするオプションが存在する．つまり，オプションと確率変数は 1 対 1 に対応している．そこで，確率変数 C でペイオフが記述されるオプションを考える．C を以下で定義する M 次元行ベクトル $\mathbf{C}$ と同一視する:

$$\mathbf{C} := (C(\omega_1), \cdots, C(\omega_M)).$$

つまり，取引可能なオプションの全体は，M 次元行ベクトルの全体 $\mathbb{R}^M$ と一致する．オプション $\mathbf{C}$ が**複製可能** (replicable) であるとは，ポートフォリオ

$\mathbf{x}$ が存在し，$\mathbf{V}_T^{\mathbf{x}} = \mathbf{C}$ を満たすときにいう．ただし，$\mathbf{x}$ は N 次元行ベクトルで，$\mathbf{V}_T^{\mathbf{x}}$ は (2.3.1) で定義されたベクトルである．つまり，確率変数を用いて表現すれば，各 $\omega \in \Omega$ に対して，$V_T^{\mathbf{x}}(\omega) = C(\omega)$ となる．ここで，

$$V_T^{\mathbf{x}}(\omega_j) = \sum_{i=1}^{N} x_i S_T^i(\omega_j).$$

であり，すべてのオプションが複製可能であるとき市場は完備であるという．

以下の第二基本定理を示そう:

定理 2.13 (資産価格理論の第二基本定理) 市場が無裁定条件を満たすとき，完備[28)]であることとマルチンゲール確率が一意であることは同値である．

証明. 完備性の定義より，市場が完備であるための必要十分条件は，任意の M 次元行ベクトル $\mathbf{C}$ に対して，方程式 $\mathbf{x}D = \mathbf{C}$ が解を持つことである．これは以下のように書き換えられる:

$$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^M.$$

ただし，f は $\mathbb{R}^N$ から $\mathbb{R}^M$ への**線形写像** (linear mapping)[29)]で，$f(\mathbf{x}) := \mathbf{x}D$ と定義されるものであり，$\operatorname{Im} f$ はその**像** (image) である．つまり，

$$\operatorname{Im} f := \{\mathbf{x}D | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N\}$$

と定義される $\mathbb{R}^N$ 上の線形部分空間である[30)]．

問 2.8 上で定義した写像 f が線形写像であること，$\operatorname{Im} f$ が線形部分空間であることを確認せよ．

次に，線形写像 $g : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$ を $g(\mathbf{y}) := D\mathbf{y}$ と定義する．ここで，$\mathbf{y}$ は M 次元列ベクトルである[31)]．さらに，

$$\operatorname{Ker} g := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M | g(\mathbf{y}) = \mathbf{0}\}$$

と定義する．これは，$\mathbb{R}^M$ の線形部分空間で，g の**核** (kernel) と呼ばれる．このとき，任意の $\mathbf{y} \in \operatorname{Ker} g$ と $\mathbf{z} \in \operatorname{Im} f$ に対して，

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{y} = 0 \tag{2.3.10}$$

[28)] 市場が完備とは，すべてのオプションが複製可能であるときにいう．

[29)] $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ が線形写像であるとは，任意の 2 つのベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^N$ と，任意の 2 つのスカラー $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ に対して，$f(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2) = \alpha_1 f(\mathbf{x}_1) + \alpha_2 f(\mathbf{x}_2)$ を満たすときにいう．

[30)] ここで，集合 L が $\mathbb{R}^N$ 上の線形部分空間であるとは，$L \subset \mathbb{R}^N$ であり，任意の $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in L$ と任意の $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ に対して，$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 \in L$ を満たすときにいう．

[31)] 従って，$D\mathbf{y}$ は N 次元列ベクトルである．

が成立する．実際，$\mathbf{z} \in \operatorname{Im} f$ を任意に取ると，$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ が存在して $\mathbf{z} = \mathbf{x}D$ を満たす．これより，$\mathbf{y} \in \operatorname{Ker} g$ であるから

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}D\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (D\mathbf{y}) = 0$$

となる．

問 2.9 上で定義した写像 g が線形写像であること，$\operatorname{Ker} g$ が線形部分空間であることを確認せよ．

ここで，次の補題を示そう:

補題 2.14 $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^M$ であることと，$\operatorname{Ker} g = \{\mathbf{0}\}$ であることは同値である．

補題 2.14 の証明. $\operatorname{Im} f$ と $\operatorname{Ker} g$ は共に $\mathbb{R}^M$ の線形部分空間であることに注意しよう．$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^M$ とする．もし $\mathbf{0}$ でない $\mathbf{y} \in \operatorname{Ker} g$ が存在すれば，$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M = \operatorname{Im} f$ であり，(2.3.10) より $\mathbf{y} \cdot \mathbf{y} = 0$ が成立する．しかしこれは矛盾である．従って，$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^M$ であるとき $\operatorname{Ker} g = \{\mathbf{0}\}$ が成立する．

次に，$\operatorname{Ker} g = \{\mathbf{0}\}$ かつ $\dim \operatorname{Im}(f) < M$ とする[32)]．つまり，$\mathbf{y} \notin \operatorname{Im} f \backslash \{\mathbf{0}\}$ が存在し，$\mathbf{y} \perp \operatorname{Im} f$ を満たす．このとき，任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ に対して，$\mathbf{x}D\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = 0$ が成立する．従って，$D\mathbf{y} = \mathbf{0}$，つまり，$\mathbf{y} \in \operatorname{Ker} g$ となり矛盾．故に，$\operatorname{Ker} g = \{\mathbf{0}\}$ であるとき $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^M$ が成り立つ． □

結局，市場が完備であることと，$\operatorname{Ker} g = \{\mathbf{0}\}$ であることは同値である．

一方，市場が無裁定条件を満たすとき，マルチンゲール確率 $\mathbf{Q}$ が存在する．ここで，各 $j \in \{1, \cdots, M\}$ に対して，$q_j := \mathbf{Q}(\{\omega_j\})$ とし，$\mathbf{q} := (q_1, \cdots, q_M)^\top$ と定義すると，$\widehat{D}\mathbf{q} = \mathbf{S}_0$，つまり，$D\mathbf{q} = (1+r)\mathbf{S}_0$ が成立する．$\operatorname{Ker} g = \{\mathbf{0}\}$ であるとき，マルチンゲール確率が一意であることを示そう．そのため，$\mathbf{q}_1$ と $\mathbf{q}_2$ を 2 つのマルチンゲール確率とすると，$D\mathbf{q}_1 = (1+r)\mathbf{S}_0$ と $D\mathbf{q}_2 = (1+r)\mathbf{S}_0$ が同時に成り立つから，$D(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) = \mathbf{0}$ を得る．よって，$\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 \in \operatorname{Ker} g$ であり，$\operatorname{Ker} g = \{\mathbf{0}\}$ であることから $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2$ が成り立つ．よって，マルチンゲール確率は一意である．

次に，マルチンゲール確率が一意であるとき，$\operatorname{Ker} g = \{\mathbf{0}\}$ であることを示そう．そこで，$\mathbf{0}$ でない $\mathbf{y} \in \operatorname{Ker} g$ が存在するとして矛盾を導く．行列 D の 1 行目の各要素は $1 + r$ であるから，第 1 成分が $\dfrac{1}{1+r}$ で他は 0 である N 次元行ベクトル $\mathbf{x}$ を取ると，$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}D$ はすべての成分が 1 である M 次元行ベクトル $\mathbf{1}$ になる．つまり，$\mathbf{1} \in \operatorname{Im} f$ である．従って，(2.3.10) より $\mathbf{1} \cdot \mathbf{y} = 0$，つまり，ベクトル $\mathbf{y}$ の成分の和 $\displaystyle\sum_{j=1}^{M} y_j$ は 0 である．よって，$\mathbf{q}$ をマルチンゲール確率とすると，ベクトル $\mathbf{q} + \mathbf{y}$ の成分の和は 1 になる．また，$\operatorname{Ker} g$ は線

[32)] $\dim \operatorname{Im}(f)$ は，線形空間 $\operatorname{Im} f$ の次元である．つまり，$\operatorname{Im} f$ の基底を構成しているベクトルの数である．詳しくは線形代数の教科書を参照されたい．

形空間であるから，$\mathbf{q}+\mathbf{y}$ の各成分が正になるように $\mathbf{y}$ を取ることができる．さらに，$D(\mathbf{q}+\mathbf{y})=(1+r)\mathbf{S}_0$ である．以上より，$\mathbf{q}+\mathbf{y}$ はマルチンゲール確率である．しかし，$\mathbf{y}$ は $\mathbf{0}$ でないから，これはマルチンゲール確率の一意性に反する．よって，$\operatorname{Ker} g=\{\mathbf{0}\}$ である．

以上より，マルチンゲール確率の一意性と $\operatorname{Ker} g=\{\mathbf{0}\}$ は同値であり，定理 2.13 が示された． □

2.3.4 オプションの価格付け

この小節では，無裁定条件を満たす完備な 1 期間モデルに対するオプション価格公式を導出する．ペイオフが確率変数 C で記述されるオプションの価格を C_0，唯一つ存在するマルチンゲール確率を $\mathbf{Q}$ とすれば，

$$C_0=\frac{1}{1+r}\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[C] \tag{2.3.11}$$

が成立する．ここで，ベクトル $\mathbf{C}$ と $\mathbf{q}$ を

$$\begin{aligned}\mathbf{C}&:=(C_1,\cdots,C_M)=(C(\omega_1),\cdots,C(\omega_M)),\\ \mathbf{q}&:=(q_1,\cdots,q_M)^{\top}=(\mathbf{Q}(\{\omega_1\}),\cdots,\mathbf{Q}(\{\omega_M\}))^{\top}\end{aligned}$$

と定義すれば，$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[C]$ はこれら 2 つのベクトルの内積で与えられる．つまり，

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[C]=\sum_{\omega\in\Omega}C(\omega)\mathbf{Q}(\{\omega\})=\sum_{j=1}^{M}C(\omega_j)\mathbf{Q}(\{\omega_j\})=\sum_{j=1}^{M}C_jq_j=\mathbf{C}\cdot\mathbf{q}$$

が成立する．

ここで，(2.3.11) を証明しよう．市場は完備なので，定理 2.13 よりすべてのオプションは複製可能である．つまり，ポートフォリオ $\mathbf{x}$ が存在して

$$\mathbf{C}=\mathbf{V}_T^{\mathbf{x}}=\sum_{i=1}^{N}x_i\mathbf{S}_T^i=\mathbf{x}D$$

が成立する．ただし，$\mathbf{S}_T^i=(S_T^i(\omega_1),S_T^i(\omega_2),\cdots,S_T^i(\omega_M))$ である．よって，

$$C_0=V_0^{\mathbf{x}}=\sum_{i=1}^{N}x_i\mathbf{S}_0^i$$

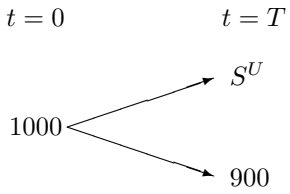
が成立する．一方，マルチンゲール確率 $\mathbf{Q}$ が一意的に存在し，$\mathbf{S}_0=\widehat{D}\mathbf{q}$ を満たす．よって，

$$C_0=\sum_{i=1}^{N}x_i(\widehat{D}\mathbf{q})_i=\mathbf{x}\cdot\widehat{D}\mathbf{q}=\frac{1}{1+r}\mathbf{x}D\mathbf{q}=\frac{1}{1+r}\mathbf{C}\cdot\mathbf{q}=\frac{1}{1+r}\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[C]$$

となることから，(2.3.11) が成立する．

第 2 章　章末問題

2-1　1 つの危険資産と 1 つの安全資産からなる 1 期間 2 項モデルを考える．ただし，金利は 0 とし，危険資産価格は下図のように変動するものとする:

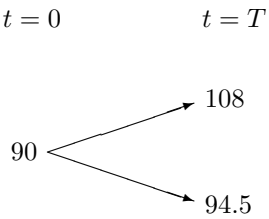


1. $S^U > 1000$ であるとき，市場は無裁定であることを証明せよ．
2. $S^U = 1000$ として，裁定ポートフォリオを構成せよ．

以下，$S^U = 1050$ とする．

3. マルチンゲール確率を求めよ．
4. 行使価格 980 のコールオプションの複製ポートフォリオを導出し，オプション価格を求めよ．
5. 行使価格 930 のプットオプションの価格を求めよ．

2-2　下図の 1 期間 2 項モデルを考える．ただし，金利 r は正とする．



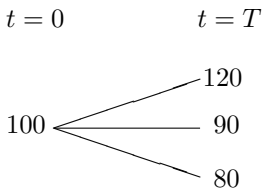
1. 市場が無裁定となる r の範囲を求めよ．

以下，$r = 0.1$ とせよ．

2. マルチンゲール確率を求めよ．
3. 行使価格 100 のコールオプションの複製ポートフォリオを導出し，オプション価格を求めよ．
4. 行使価格 102 のプットオプションの価格を求めよ．

2-3　下図の 1 期間 3 項モデルを考える．ただし，金利 r は 0 とする．

1. 無裁定条件が満たされていることを示せ．
2. 市場は完備でないことを証明せよ．
3. すべてのマルチンゲール確率を求めよ．
4. 行使価格 85 のコールオプション 1 単位を $\frac{35}{2}$ で売却した際の裁定機会を導出せよ．



以下，$\#\Omega = M$ である N 個の資産 (1 つの安全資産を含む) が取引可能な 1 期間モデルを (N, M)-モデルと記述する．

2-4 $\mathbf{S}_0$ と D が以下のように与えられている $(3,3)$-モデルを考える:

$$\mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 10 & 70 \\ 100 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

1. 市場は無裁定であることを示せ．
2. マルチンゲール確率を求めよ．
3. 市場は完備であることを証明せよ．
4. オプション $\mathbf{C} = (10, 0, 0)$ の複製戦略を導出し，その価格を求めよ．

2-5 以下の $(3,3)$-モデルを考える:

$$\mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 50 \\ 40 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1.1 & 1.1 & 1.1 \\ 44 & 55 & 77 \\ 55 & 44 & 22 \end{pmatrix}.$$

1. 市場は無裁定であることを示せ．
2. 市場は完備でないことを証明せよ．

2-6 以下の $(3,4)$-モデルを考える:

$$\mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 9 & 9 & u \\ 10 & 10 & 14 & 14 \end{pmatrix}.$$

1. $u = 12$ であるとき，市場は無裁定だが完備でないことを示せ．
2. $u = 11$ であるとき，裁定機会を求めよ．
3. 任意の $u > 0$ に対して，市場は完備でないことを示せ．

第3章　多期間モデルにおけるオプション価格付け理論

本章では，2.1 節で学んだ 1 期間 2 項モデルの多期間へ拡張である多期間 2 項モデルについて議論する．1 期間モデルを繰り返し解くことにより，多期間モデルのオプション価格が得られることを紹介する．本章の後半では，満期までの任意の取引時刻で行使可能であるアメリカ型オプションについて述べる．特に，早期行使がどのような状況で行われるのかについて議論する．なお，本章以降では確率論に基づいた議論を展開する．

3.1　多期間 2 項モデル

この節では，1 期間 2 項モデルを多期間モデルへ拡張した**多期間 2 項モデル** (multi-period binomial model) について議論する．**多期間 2 項モデルは同じ構造を持った 1 期間 2 項モデルの重ね合わせになっている．**従って，1 期間 2 項モデルに分解し，満期から時間を遡りながら複製ポートフォリオやオプション価格を計算する．一方，多期間モデルにおいてポートフォリオを考える際には，途中での組み換えを考慮する必要があり，ポートフォリオは確率過程になる．さらに，満期以前の時刻にオプションを取引することも可能であり，オプション価格も確率過程となる．このように多期間モデルではその数学的構造が複雑になるため，この節では確率空間をきちんと記述し，確率論の記号を用いて議論する．

3.1.1　準備

この小節では，取引時刻が $t = 0, 1, \ldots, T$ である多期間 2 項モデルを考える．なお，T はこの市場の満期であり，自然数である．1 期間 2 項モデルと同様，1 つの危険資産と 1 つの安全資産が取引可能であるとし，時刻 $t = 0, 1, \ldots, T$ における安全資産の価格 S_t^0 は

$$S_t^0 = (1 + r)^t$$

により与えられるものとする．ただし，$r \geq 0$ は t から $t + 1$ までの金利であり，これを**ショートレート** (short rate) と呼ぶこともある[1)]．次に，時刻

[1)] 多期間 2 項モデルでは，ショートレートは時刻 t に依存していない．

$t = 1, \ldots, T$ における危険資産価格 S_t は，帰納的に

$$S_t = S_{t-1} Z_t$$

と記述されるものとする．ただし，$S_0 > 0$ は定数であり，確率変数列 $\{Z_t\}_{t=1,\ldots,T}$ は i.i.d.[2] で，各 Z_t は u または $d (u > d > 0)$ の値を取る確率変数とする．これは，各時刻 $t = 1, \cdots, T$ における危険資産価格を決めるために，コインを投げを行い，もし表が出たら価格は u 倍され，裏ならば d 倍されると考えればよい．もちろん，各時刻で投げるコインは同じで，コイン投げの結果は独立とする．つまり，確率変数 Z_t は t 回目のコイン投げ (時刻 t におけるコイン投げと言っても良い) の結果を表している．このとき，危険資産価格過程 $\{S_t\}_{t=0,\ldots,T}$ は 2^T 通りの**標本路** (sample path)[3] を持つ．従って，満期 T の多期間 2 項モデル (T 期間 2 項モデル) の標本空間 Ω は 2^T 個の要素からなる．例えば，$T = 3$ であれば，Ω は

$$\Omega = \{\omega_{uuu}, \omega_{uud}, \omega_{udu}, \omega_{duu}, \omega_{udd}, \omega_{dud}, \omega_{ddu}, \omega_{ddd}\}, \tag{3.1.1}$$

となる．ここで,「uud」は 3 回のコイン投げの結果が表表裏となる事象を表している[4]．従って，$S_3(\omega_{uud}) = u^2 d S_0$ となる．また，Z_1 の分布は

$$\mathbf{P}(Z_1 = u) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega | Z_1(\omega) = u\}) = \mathbf{P}(\{\omega_{uuu}, \omega_{uud}, \omega_{udu}, \omega_{udd}\})$$

となる．確率変数列 $\{Z_t\}_{t=1,\ldots,T}$ は i.i.d. なので，$\mathbf{P}(Z_t = u)$ の値は t に依存しないことに注意せよ．

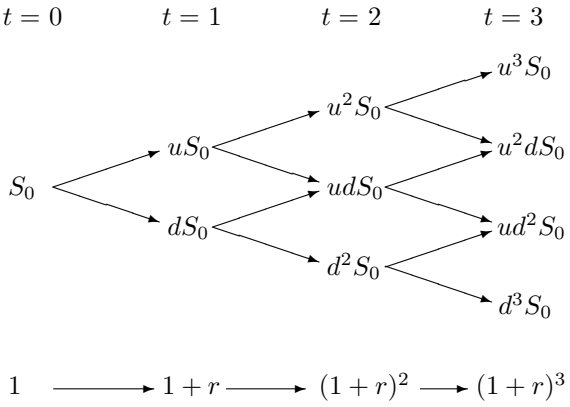


図 3.1: 3 期間 2 項モデルの危険資産価格と安全資産価格

[2] 独立同一分布に従う確率変数列である．詳しくは A.1.4 を参照のこと．
[3] 標本路とは，例えば図 3.1 におけるモデルであれば，S_0 から $t = 3$ の何れかのノードに辿り着くまでの経路のことである．
[4] つまり，標本空間 Ω の要素を 1 つ選ぶことは，標本路を 1 つ選ぶことである．

3.1.2　複製ポートフォリオによる価格付け

多期間 2 項モデルにおけるオプション価格計算には，1 期間 2 項モデルの場合と同様に，複製ポートフォリオの初期費用による方法とマルチンゲール確率を用いた方法の 2 通りがある．まずこの小節では，複製ポートフォリオについて議論しよう．

そもそも多期間モデルにおいてポートフォリオを考える際には，ポートフォリオの組み換えを考慮する必要がある．より詳しく説明しよう．まず，時刻 0 でポートフォリオを組む．これを (α_0, β_0) と記述する．ただし，α_0 は安全資産の保有量，β_0 は危険資産の保有量である．このポートフォリオを時刻 1 で新たなポートフォリオ (α_1, β_1) に組み替える．時刻 1 では S_1 が観測可能なので，(α_1, β_1) は S_1 の値に依存している．従って，α_1, β_1 は確率変数である．これを時刻 $T-1$ まで繰り返す．つまり，時刻 $t = 1, \ldots, T-1$ では，$S_1, \ldots, S_t$ の値に依存して，新たなポートフォリオ (α_t, β_t) を組む[5)]．以上より，多期間モデルにおけるポートフォリオは，2 つの確率過程 $\{\alpha_t\}_{t=0,\ldots,T-1}$ と $\{\beta_t\}_{t=0,\ldots,T-1}$ により与えられる．

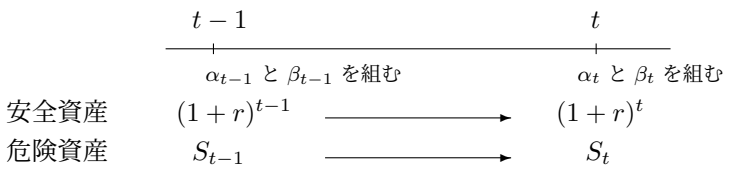


図 3.2: 時刻 $t-1$ から t までのポートフォリオ

また，時刻 t におけるポートフォリオの価値を V_t とすると，

$$V_t = \alpha_t (1+r)^t + \beta_t S_t \tag{3.1.2}$$

となる．特に，$V_0 = \alpha_0 + \beta_0 S_0$ である．

ポートフォリオ $\{(\alpha_t, \beta_t)\}$[6)]が **self-financing**[7)]であるとは，任意の $t = 1, \ldots, T$ に対して，

$$a_{t-1}(1+r)^t + \beta_{t-1} S_t = \alpha_t (1+r)^t + \beta_t S_t \tag{3.1.3}$$

が成立するときにいう．これは，各時刻でポートフォリオを組み替えるとき，組み換えの前後でポートフォリオの価値が変動しないことを表している．つまり，ポートフォリオの組み換えに際し，資金を追加したり，資金を消費に回したりしないことを意味している．そして，ポートフォリオが**裁定機会**で

[5)] 時刻 $t-1$ で組み t まで保有するポートフォリオを (α_t, β_t) と記述している文献もある．
[6)] これは確率過程の組を表している．なお，t の範囲は明らかなので省略する．
[7)] Self-financing は「自己資金調達的」などと訳されることがあるが，統一された訳語があるわけではない．そこで，この講義では無理に訳語を使用せず，self-financing と呼ぶことにする．

あるとは，それが self-financing であり，

$$\begin{cases} V_0 = 0, \\ \mathbf{P}(V_T \geq 0) = 1, \\ \mathbf{P}(V_T > 0) > 0. \end{cases}$$

を満たすときにいう．

ペイオフが確率変数 C_T で与えられるオプションに対して，self-financing なポートフォリオ $\{(\alpha_t, \beta_t)\}_{t=0,\dots,T-1}$ が C_T を複製しているとは，

$$C_T = V_T$$

を満たすときにいう[8]．さらに，1 期間モデルと同様に無裁定条件の下では，オプション価格 C_0 はこの複製ポートフォリオの初期費用と一致することが知られている．この事実と複製ポートフォリオの求め方については，後の 3.1.4 節において具体例を用いながら説明する．

フィルトレーション 図 3.1 にある 3 期間モデルを考えよう．このモデルの標本空間は (3.1.1) で与えられている通り，8 個の事象を含んでいる．時刻 0 においてポートフォリオ (α_0, β_0) を組むとき，どの $\omega \in \Omega$ が将来実現するかに関する情報は一切ない．一方，時刻 1 になると S_1 の値が観測でき，実現される事象が $A_u := \{\omega_{uuu}, \omega_{uud}, \omega_{udu}, \omega_{udd}\}$ に入っているか否かの判断がつく．そこで，$\{\Omega, \emptyset, A_u, A_u^c\}$ が Ω 上の σ-加法族[9]であることに注意し，これを $\mathcal{F}_1$ と記述し，時刻 1 までに得られる情報と見なす．実際，時刻 1 で組まれるポートフォリオ (α_1, β_1) は，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}_1, \mathbf{P})$ 上の確率変数である．つまり，確率変数 α_1 及び β_1 は $\mathcal{F}_1$**-可測** ($\mathcal{F}_1$-measurable) である．ここで時刻 0 に戻ろう．時刻 0 で分かることは，将来実現する事象が Ω に属しているという当然のことだけである．そこで，時刻 0 における情報を $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ と記述することにする．これも σ-加法族であることに注意しよう．次に時刻 2 では，実現される事象が $A_{uu} := \{\omega_{uuu}, \omega_{uud}\}$, $A_{ud} := \{\omega_{udu}, \omega_{udd}\}$, $A_{du} := \{\omega_{duu}, \omega_{dud}\}$, $A_{dd} := \{\omega_{ddu}, \omega_{ddd}\}$ のどれに属しているのか観測可能となる．従って，時刻 2 における情報 $\mathcal{F}_2$ は，$A_{uu}, A_{ud}, A_{du}, A_{dd}$ を含む最小の σ-加法族となる．なお，$\mathcal{F}_2$ はかなり大きな集合族であるため，すべてを書き下すことはしない．もちろん，ポートフォリオ (α_2, β_2) は S_1 及び S_2 の値に応じて決まるので，$(\Omega, \mathcal{F}_2, \mathbf{P})$ 上の確率変数，つまり，$\mathcal{F}_2$-可測である．さらに時刻 3 になると，どの事象が実現したのか明らかになるので，$\mathcal{F}_3$ は Ω のべき集合となる．

$\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ は時間パラメータを持った σ-加法族の増大列であり，各時刻までに得られた情報と解釈できる．これを**フィルトレーション** (filtration) という．なお，σ-加法族が大きくなるというのは，より細かな集合が含まれ

[8] この等式は確率変数の等式であるから，本来「任意の $\omega \in \Omega$ に対して，$C_T(\omega) = V_T(\omega)$」と書くべきであるが，省略してこのように書くことが多い．

[9] A.2.1 節を参照のこと．

るということを意味している．さらに，ポートフォリオを構成している 2 つの確率過程 $\{\alpha_t\}$ と $\{\beta_t\}$ は，$t = 1, 2, 3$ において $\mathcal{F}_t$-可測になっている．このような確率過程を $\{\mathcal{F}_t\}$-**適合過程** ($\{\mathcal{F}_t\}$-adapted process) という．また，脚注 5) のようにポートフォリオを記述すると，α_t 及び β_t は $\mathcal{F}_{t-1}$-可測となる．このような確率過程を**可予測** (predictable) という． □

問 3.1 $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1$ 及び $\mathcal{F}_3$ が σ-加法族であることを確認せよ．

3.1.3 マルチンゲール確率と基本定理

多期間モデルにおいて，ポートフォリオは確率過程となるため，複製ポートフォリオの初期費用の計算は複雑になってしまう．そこで，オプション価格の計算において，マルチンゲール確率を用いた方法が重要となる．この小節では，多期間モデルにおけるマルチンゲール確率の定義を与える．

満期 T の多期間 2 項モデルを考える．可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度 $\mathbf{Q}$ がマルチンゲール確率であるとは，任意の $t = 0, 1, \ldots, T-1$ と，$\mathbf{P}(S_t = s) > 0$ となる任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して

$$s = \frac{1}{1+r}\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[S_{t+1}|S_t = s] \tag{3.1.4}$$

を満たすときにいう[10]．ただし，任意の $\omega \in \Omega$ に対して $\mathbf{Q}(\{\omega\}) > 0$ であるとする．$S_t = s$ であるとき，S_{t+1} の値は us または ds となるので，

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[S_{t+1}|S_t = s] &= us\mathbf{Q}(S_{t+1} = us|S_t = s) + ds\mathbf{Q}(S_{t+1} = ds|S_t = s)\\ &= us\mathbf{Q}(Z_{t+1} = u) + ds\mathbf{Q}(Z_{t+1} = d) = s\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[Z_{t+1}]\end{aligned}$$

が成立する．ここで，

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}(S_{t+1} = us|S_t = s) &= \frac{\mathbf{Q}(S_{t+1} = us, S_t = s)}{\mathbf{Q}(S_t = s)} = \frac{\mathbf{Q}(Z_{t+1} = u, S_t = s)}{\mathbf{Q}(S_t = s)}\\ &= \frac{\mathbf{Q}(Z_{t+1} = u)\mathbf{Q}(S_t = s)}{\mathbf{Q}(S_t = s)} = \mathbf{Q}(Z_{t+1} = u)\end{aligned}$$

であることに注意せよ．なお，s について一括して，(3.1.4) を以下のように記述することもできる:

$$S_t = \frac{1}{1+r}\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[S_{t+1}|S_t]. \tag{3.1.5}$$

この右辺にある条件付き期待値は確率変数であることに注意せよ．なお，上記の計算を踏まえれば

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[S_{t+1}|S_t] = S_t\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[Z_{t+1}]$$

[10] この定義はとりあえずの定義である．より一般的な定義は問 3.3 で紹介する．なお，条件付き期待値の定義については A.1.4 節を参照せよ．

が成立していることが分かる．

ここで $q_u := \mathbf{Q}(Z_t = u)$，$q_d := \mathbf{Q}(Z_t = d)$[11] とおくと，$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[Z_t] = 1+r$，つまり，$uq_u + dq_d = 1+r$ が成り立つ[12]．そこで，$q_u + q_d = 1$，かつ，$0 < q_u < 1$ であるから，$uq_u + dq_d = 1 + r$ は

$$q_u = \frac{1 + r - d}{u - d} \tag{3.1.6}$$

と同値である．従って，$0 < q_u < 1 \Leftrightarrow u > 1+r > d$ であるから，$u > 1+r > d$ であることと，マルチンゲール確率 $\mathbf{Q}$ が存在することは同値であり，$\mathbf{Q}$ は (3.1.6) により与えられる．多期間 2 項モデルにおけるマルチンゲール確率は，任意の 1 期間モデルのマルチンゲール確率により与えられる．

問 3.2 (3.1.6) を導け．また，$0 < q_u < 1 \Leftrightarrow u > 1 + r > d$ を証明せよ．

問 3.3 任意の $t_1, t_2 \in \{0, 1, \ldots, T\}$，$t_1 < t_2$ に対して，

$$S_{t_1} = \frac{1}{(1+r)^{t_2 - t_1}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[S_{t_2} | S_{t_1}]$$

が成立していることを示せ．従って，A.1.4 節にあるマルチンゲールの定義に照らし合わせると，マルチンゲール確率 $\mathbf{Q}$ の下，危険資産割引価格過程 $\{(1+r)^{-t} S_t\}$ はマルチンゲールになっていることが分かる[13]．

資産価格理論の基本定理を踏まえてこれまでの議論を整理しよう．多期間 2 項モデルが無裁定条件を満たすことと，$u > 1 + r > d$ であることは同値である．また，無裁定条件下ではマルチンゲール確率は一意であるから，市場は完備である．以上まとめると次の定理を得る．

定理 3.1 (資産価格理論の基本定理) 多期間 2 項モデルが $u > 1 + r > d$ を満たすことと，無裁定条件を満たすことは同値である．無裁定条件を満たすとき，市場は完備であり，唯一つ存在するマルチンゲール確率は (3.1.6) により与えられる．

マルチンゲール確率を用いたオプション価格計算については，次小節以降で紹介する．

---

[11] これらの値は t に依らない．
[12] 確率測度 $\mathbf{Q}$ を与えることと，$0 < q_u < 1$ の値を与えることは同値である．
[13] もちろん，これが本来のマルチンゲール確率の定義である．

倍々戦略 コインを投げて表が出たら賭け金の倍を受け取ることができるギャンブルを考えよう．つまり，x 円を賭けると，表が出たら $2x$ 円貰えるので x 円の儲けとなり，裏が出たら賭け金は没収されるので x 円の損失となる．このギャンブルを繰り返し行うとき，表が出たらその時点でギャンブルを止め，裏が出たら次の賭け金を倍にする戦略を考える．最初の賭け金を x 円としよう．1 回目でいきなり表が出たら，x 円の儲けを得てここで止める．裏が出たら次のコイン投げに倍の $2x$ 円を賭ける．もし $n-1$ 回目まで裏が出続けて n 回目で初めて表が出たら，そのときの賭け金は $2^{n-1}x$ 円なので，儲けも $2^{n-1}x$ 円である．一方，それまでの損失は $(1+2+\cdots+2^{n-2})x = (2^{n-1}-1)x$ 円であるから，合計では x 円の儲けとなる．コイン投げを繰り返していればいつかは必ず表が出るので，この戦略を用いれば確実に x 円の利益が得られる．このような戦略を**倍々戦略** (doubling strategy) という．しかし，この方法を実現するためにはいくらでも借金ができる状況でなければならず，非現実的であると言えよう．

多期間 2 項モデルにおいて満期 T を無限大にした場合，いくらでも借金できるのであれば，上述の倍々戦略の要領で以下のような裁定機会を構成できる．ただし，簡単のため金利は 0 とし，$u = 3/2$，$d = 1/2$ とする．時刻 0 において，安全資産で資金調達をして危険資産 1 単位を購入する．つまり，$\alpha_0 = -S_0$，$\beta_0 = 1$，$V_0 = 0$ となる．時刻 $t(\geq 1)$ まで危険資産価格が下がり続けているとき，つまり，$S_t = 2^{-t}S_0$ であるとき，安全資産で新たに資金調達をして危険資産を 4^t 単位追加購入する．その費用は 2^tS_0 であるから，

$$a_t = -(1+2+\cdots+2^t)S_0 = -(2^{t+1}-1)S_0,\ b_t = 1+4+\cdots+4^t = \frac{1}{3}(4^{t+1}-1)$$

となる．時刻 $t+1$ において初めて危険資産価格が上昇したとすると，$S_{t+1} = \dfrac{3}{2^{t+1}}S_0$ であり，

$$V_{t+1} = -(2^{t+1}-1)S_0 + \frac{1}{3}(4^{t+1}-1)\frac{3}{2^{t+1}}S_0 = (-2^{t+1}+1+2^{t+1}-2^{-t-1})S_0 > 0$$

となる．よって，保有している危険資産をすべて売却しこれ以降何もしなければ，確実に利益が得られる．つまり，この戦略は裁定機会である．満期が有限の多期間 2 項モデルでは，このような戦略を取ることはできない．従って，多期間 2 項モデルは無裁定条件を満たす．一方，取引時刻が無限大になると，無裁定条件を保証するためには上記のような裁定機会を排除しなければならず，ポートフォリオに何らかの制約が必要となる． □

3.1.4 オプション価格と複製ポートフォリオの計算

この節では，$S_0 = 80$, $u = 3/2$, $d = 1/2$ 及び $r = 0$ である 3 期間 2 項モデルを例に取り，オプション価格と複製ポートフォリオの計算方法を紹介する．

このモデルが無裁定条件を満たしていることは明らかである．危険資産価格の変動は以下のように与えられる．

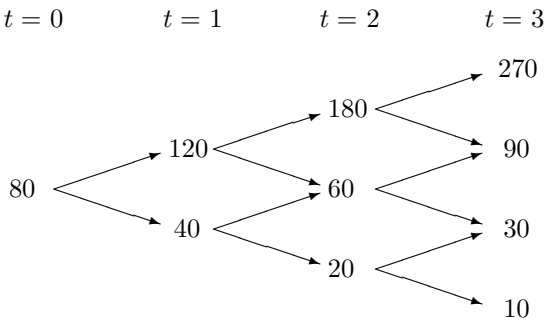


図 3.3: 危険資産の価格変動

ここで，行使価格 80 のコールオプションを考える．つまり，そのペイオフは $C_3 = (S_3 - 80)^+$ である．オプション価格 C_0 を求めることがとりあえずの目標である．そのため，**図 3.3 の 3 期間モデルを 6 つの 1 期間 2 項モデルに分解し，満期に近い方から順に解いていく．**まず，図 3.4 にあるような右上端の 1 期間 2 項モデルに注目する．

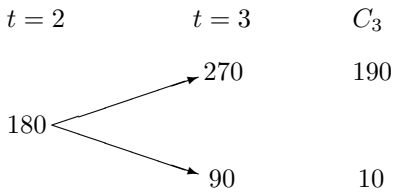


図 3.4: 右上端の 1 期間 2 項モデルとオプションペイオフ

マルチンゲール確率を (3.1.6) より求めると，

$$q_u = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2},$$

となる．$S_2 = 180$ となるとき，時刻 2 におけるオプション価格 C_2 は, 以下の条件付き期待値により与えられる:

$$C_2 = \mathbf{E_Q}[C_3 | S_2 = 180] = \frac{1}{2}190 + \frac{1}{2}10 = 100.$$

同様にして，$S_2 = 60$ や $S_2 = 20$ となるときの C_2 の値も計算することができる．まとめると，

$$C_2 = \begin{cases} 100, & S_2 = 180 \text{ であるとき}, \\ 5, & S_2 = 60 \text{ であるとき}, \\ 0, & S_2 = 20 \text{ であるとき}, \end{cases}$$

を得る．

次に，時刻 1 におけるオプション価格 C_1 を求めよう．$S_1 = 120$ となる場合については，図 3.5 の 1 期間 2 項モデルを考える．

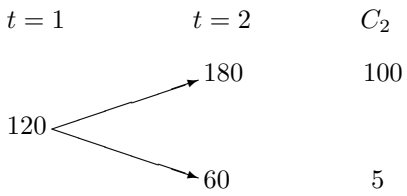


図 3.5: $S_1 = 120$ のノードから始まる 1 期間 2 項モデルとオプションペイオフ

時刻 2 におけるオプション価格 C_2 をオプションペイオフとして C_1 の値を計算する．この結果，以下のように C_1 の値が得られる:

$$C_1 = \begin{cases} 52.5, & S_1 = 120 \text{ であるとき}, \\ 2.5, & S_1 = 40 \text{ であるとき}. \end{cases}$$

同様の計算を繰り返すと，オプション価格 C_0 が

$$C_0 = \frac{1}{2}(52.5 + 2.5) = 27.5$$

であることが分かる．ここまでの計算をまとめオプション価格過程 $\{C_t\}$ を図示したものが図 3.6 である．

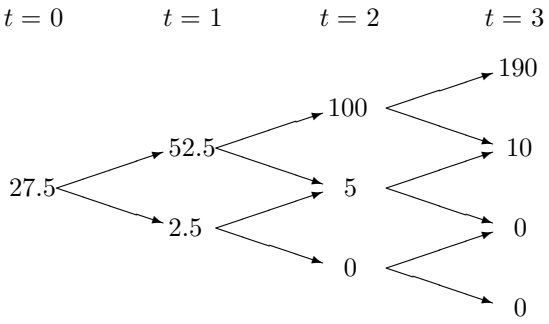


図 3.6: オプション価格変動

問 3.4 実際に図 3.6 が正しいことを検証せよ．

複製ポートフォリオの計算もこれまでの方法と同様にして行うことができる．例えば，$S_2 = 180$ であるとき，α_2 及び β_2 の値は以下の連立方程式の解となる:

$$\begin{cases} \alpha_2 + 270\beta_2 = 190, \\ \alpha_2 + 90\beta_2 = 10. \end{cases}$$

よって，$\alpha_2 = -80, \beta_2 = 1$ を得る．この計算を各ノードに対して行えば，複製ポートフォリオすべてが得られる．なお，各ノードにおける複製ポートフォリオの費用は，そのノードにおけるオプション価格と一致している．さらに，時刻 $t-1$ で組んだ複製ポートフォリオの時刻 t における価値 V_t は，時刻 t においてどちらのノードに到達しても C_t の値と一致する．つまり，任意の時刻 t において、$V_t = C_t$ が成立している．従って，求めた複製ポートフォリオは self-financing であることが分かる．例えば，$S_2 = 180$ において，複製ポートフォリオの費用は $-80 + 180 \times 1 = 100$ であり，このノードにおけるオプション価格 $C_2 = 100$ と一致している．また，$S_1 = 120$ で組んだ複製ポートフォリオの価値は，$S_2 = 180$ において 100 になることもすぐに確認できる．満期以前の時刻 $t < T$ におけるオプション価格 C_t は，この時点でオプションを取引した場合の価格を表しているが，これはこの時点における複製ポートフォリオの費用に一致する．つまり，時刻 1 以降にオプション取引を開始したとしても，各ノードにおける複製ポートフォリオの値は，時刻 0 から開始した場合と同じである．

問 3.5 各ノードにおける複製ポートフォリオを計算し，その費用がオプション価格と一致していることを確認せよ．

3.1.5 Cox-Ross-Rubinstein 公式

無裁定条件を満たす T 期間 2 項モデルに対するオプション価格公式である **Cox-Ross-Rubinstein(CRR) 公式**を導出する．ここでは，オプションペイオフが満期における危険資産価格 S_T の関数で与えられる場合，つまり，ある関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を用いて $C_T = f(S_T)$ と書ける場合を考える．例えば，$f(x) = (x-K)^+$ とすればこれはコールオプションを表している．なお，図 3.7 は，この小節で扱うモデルとオプションペイオフを描いたものである．ただし，$0 < d < 1 + r < u$, $S_0 > 0$, $r \geq 0$ とする．

まず，$\mathbf{Q}$ をマルチンゲール確率，$q_u = \mathbf{Q}(Z_t = u)$，$q_d = \mathbf{Q}(Z_t = d)$ としてとして，以下の命題を示そう:

命題 3.2 任意の $t = 0, 1, \ldots, T-1$ に対して，

$$C_t = (1+r)^{-(T-t)} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[f(S_T)|S_t] \tag{3.1.7}$$

が成り立つ．

証明. 3.1.3 節で述べたように，多期間 2 項モデルは無裁定かつ完備なので，オプション $f(S_T)$ に対する複製ポートフォリオが存在する．それを $\{(\alpha_t, \beta_t)\}_{t=0,\ldots,T-1}$，その価値を表す確率過程を $\{V_t\}_{t=0,\ldots,T}$ とする．ここで，

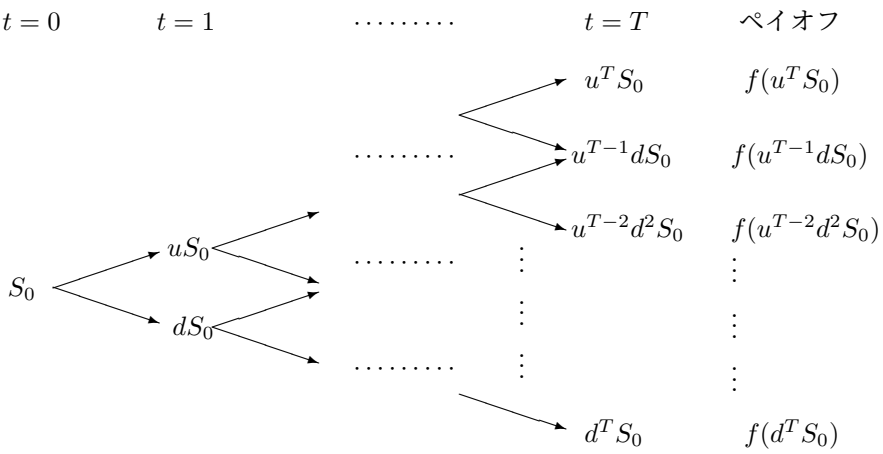


図 3.7: T 期間 2 項モデルにおける危険資産価格の変動とオプションペイオフ

$V_T = f(S_T)$ が成立していることに注意せよ．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1+r}\mathbf{E_Q}[f(S_T)|S_{T-1}] \\
&= \frac{1}{1+r}\mathbf{E_Q}[V_T|S_{T-1}] = \frac{1}{1+r}\mathbf{E_Q}[\alpha_{T-1}(1+r)^T + \beta_{T-1}S_T|S_{T-1}] \\
&= \alpha_{T-1}(1+r)^{T-1} + \beta_{T-1}\frac{1}{1+r}\mathbf{E_Q}[S_T|S_{T-1}] \\
&= \alpha_{T-1}(1+r)^{T-1} + \beta_{T-1}S_{T-1} = V_{T-1} = C_{T-1}
\end{aligned}$$

が成立する．3 つ目の等号は，α_{T-1} 及び β_{T-1} が S_{T-1} の値に応じて決まるため，A.1.4 節で紹介した条件付き期待値の性質より，α_{T-1} 及び β_{T-1} を条件付き期待値の外に出せることより得られる．また，最後の 3 つの等号を得るため，(3.1.5)，複製ポートフォリオが self-financing であることから (3.1.2) と (3.1.3) が成立していること，及び，3.1.4 節で紹介したように $V_t = C_t$ が任意の t で成立していることを用いた．同様にして，

$$\frac{1}{1+r}\mathbf{E_Q}[C_{T-1}|S_{T-2}] = \frac{1}{1+r}\mathbf{E_Q}[V_{T-1}|S_{T-2}] = V_{T-2} = C_{T-2}$$

を示すことができる．従って，

$$C_{T-2} = \frac{1}{1+r}\mathbf{E_Q}[C_{T-1}|S_{T-2}] = \frac{1}{1+r}\mathbf{E_Q}\left[\frac{1}{1+r}\mathbf{E_Q}[f(S_T)|S_{T-1}]\middle|S_{T-2}\right]$$

が成立する．一方，$\{Z_t\}$ は i.i.d. であることから

$$\mathbf{E_Q}[f(S_T)|S_{T-1}] = \mathbf{E_Q}[f(Z_T S_{T-1})|S_{T-1}] = f(uS_{T-1})q_u + f(dS_{T-1})q_d$$

となり，

$$\mathbf{E_Q}[\mathbf{E_Q}[f(S_T)|S_{T-1}]|S_{T-2}] = \mathbf{E_Q}[f(uS_{T-1})q_u + f(dS_{T-1})q_d|S_{T-2}]$$

が成立する．ここで，同様の計算より，

$$\mathbf{E_Q}[f(uS_{T-1})|S_{T-2}] = \mathbf{E_Q}[f(uZ_{T-1}S_{T-2})|S_{T-2}] = f(u^2S_{T-2})q_u + f(udS_{T-2})q_d$$

となるので，

$$\mathbf{E_Q}[\mathbf{E_Q}[f(S_T)|S_{T-1}]|S_{T-2}] = f(u^2S_{T-2})q_u^2 + 2f(udS_{T-2})q_uq_d + f(d^2S_{T-2})q_d^2$$

が得られる．一方，

$$\begin{aligned}\mathbf{E_Q}[f(S_T)|S_{T-2}] &= \mathbf{E_Q}[f(Z_TZ_{T-1}S_{T-2})|S_{T-2}] \\ &= f(u^2S_{T-2})q_u^2 + 2f(udS_{T-2})q_uq_d + f(d^2S_{T-2})q_d^2\end{aligned}$$

となるから，

$$\mathbf{E_Q}[f(S_T)|S_{T-2}] = \mathbf{E_Q}[\mathbf{E_Q}[f(S_T)|S_{T-1}]|S_{T-2}] \tag{3.1.8}$$

が成立する．以上より，

$$\frac{1}{(1+r)^2}\mathbf{E_Q}[f(S_T)|S_{T-2}] = C_{T-2}$$

を得る．これを繰り返せば，(3.1.7) が成立することが分かる． □

(3.1.7) における条件付き期待値の具体的表示を求め，CRR 公式を導出する．

定理 3.3 (Cox-Ross-Rubinstein(CRR) 公式) $t = 0, 1, \ldots, T-1$ におけるオプション価格 C_t は，

$$C_t = (1+r)^{-(T-t)} \sum_{k=0}^{T-t} \binom{T-t}{k} q_u^{T-t-k} q_d^k f(u^{T-t-k}d^kS_t)$$

と与えられる．ただし，$\binom{T-t}{k} = \dfrac{(T-t)!}{(T-t-k)!k!}$ である[14)]．

証明. 命題 3.2 より条件付き期待値 $\mathbf{E_Q}[f(S_T)|S_t]$ を計算すればよい．図 3.7 より S_T の値は $u^{T-t-k}d^kS_t$ と表される．ただし，k の範囲は $\{0, 1, \ldots, T-t\}$ である．一方，$S_T = Z_TZ_{T-1}\cdots Z_{t+1}S_t$ であるから，$S_T = u^{T-t-k}d^kS_t$ となるためには，$Z_l, l = t+1, \ldots, T$ のうち k 個で d，残り $T-t-k$ 個で u の値を取る．その組み合わせは全部で $\binom{T-t}{k}$ 通りあり，各々の組み合わせに対する ($\mathbf{Q}$ の下での) 確率は $q_u^{T-t-k}q_d^k$ であるから，

$$\mathbf{Q}(S_T = u^{T-t-k}d^kS_t|S_t) = \binom{T-t}{k} q_u^{T-t-k}q_d^k$$

---

14) $\binom{n}{k}$ は n 個の要素から k 個を選ぶ組み合わせの数を表している．これは n 次多項式 $(1+x)^n$ を展開したときの x^k の係数でもあることから，**二項係数** (binomial coefficient) と呼ばれる．なお，${}_nC_k$ と表記する場合もある．

が成り立つ．従って，

$$\begin{aligned}\mathbf{E_Q}[f(S_T)|S_t] &= \sum_{k=0}^{T-t} f(u^{T-t-k}d^k S_t)\mathbf{Q}(S_T = u^{T-t-k}d^k s|S_t) \\ &= \sum_{k=0}^{T-t} \binom{T-t}{k} q_u^{T-t-k} q_d^k f(u^{T-t-k}d^k S_t)\end{aligned}$$

が成立する．□

問 3.6 行使価格 K のコールオプションに対する CRR 公式を導け．

モデル構築とパラメータ ここで，1.3 節での議論を振り返ってみよう．実際にオプション価格計算を行う際には，市場モデルを構築しなければならない．まず，モデルの範囲を設定することから始める．取引可能な資産は対象となるオプションの原資産と安全資産に限り，取引時刻も現時点からオプションの満期までに限定することが多い．原資産は危険資産であるから，価格過程を確率モデルによって記述する．この際，1.3.2 節で述べたように，モデルのフレームワークを最初に決めなければならない．例えば，危険資産価格を多期間 2 項モデルで記述するとし，1 期間を 1 営業日に設定するとしよう．つまり，満期まで金利は一定で，営業日毎の危険資産価格変動は独立かつ同一の 2 項モデルで与えられることを仮定する．また，1.3.3 節で紹介した通り，市場は完全競争的であることも仮定する．そして第二段階として，パラメータの値を決定する．1.3.2 節でも述べたように，パラメータは 3 種類に分類される．まず，モデルフレームワークを設定した時点で自動的に決定しているパラメータとして，オプションの行使価格 K と期間の数 T の 2 つがある．次に，市場を観測すれば直ちに決定するパラメータとして，危険資産の初期価格 S_0 とショートレート r がある．なお，r については，短期割引国債の利回りや銀行間取引レートのような指標を用いて決定することが多い．ただし，この例におけるショートレートは 1 営業日当たりの金利なので，指標となる金利が年率で表示されている場合，1 年間の営業日数で割る必要がある．最後に残るパラーメータは u と d であるが，これらについては危険資産価格の日次データを用いるなどして推定または調整する必要がある．実務においては，モデルフレームワークの選択と未知パラメータの推定が重要であるが，理論ではこれらの問題に深入りしない．□

3.2 アメリカ型オプション

これまで扱ってきたオプションは，満期でのみ権利行使が可能となるヨーロッパ型オプションであった．この節では，満期までのどの取引時刻でも権利行使が

可能であるアメリカ型オプションの価格付けについて論じる．この節を通して，前節で扱った無裁定多期間 2 項モデルを考える．つまり，$0 < d < 1 + r < u$, $S_0 > 0$, $r \geq 0$ を仮定し，$\mathbf{Q}$ はマルチンゲール確率を表すものとする．

3.2.1 アメリカ型コールオプション

まず，同じ行使価格 K を持つアメリカ型とヨーロッパ型のコールオプションを同時に考え，これらの価格を比較しよう．アメリカ型コールの買い手が時刻 t で行使すると，ペイオフは $(S_t - K)^+$ となる．特に，満期 T で行使すれば，ペイオフは $(S_T - K)^+$ となりヨーロッパ型と一致する．ここで C_t^A 及び C_t^E を，それぞれアメリカ型，ヨーロッパ型の時刻 t におけるオプション価格とする．ヨーロッパ型と比較し，アメリカ型では**早期行使** (early exercise)[15] という権利がオプションの買い手に与えられることから，$C_t^A \geq C_t^E$ が成立していると考えるのが自然であろう．しかし，以下の定理で示すように，**C_t^A と C_t^E の値は任意の取引時刻 $t = 0, 1, \ldots, T$ において一致するのである．**

定理 3.4 任意の $t = 0, 1, \ldots, T$ において $C_t^A = C_t^E$ が成立する．

証明. まず，満期時点におけるペイオフは一致するので，$C_T^A = C_T^E$ が成り立つ．今，ある $t = 0, 1, \ldots, T-1$ において $\mathbf{P}(C_t^A < C_t^E) > 0$ が成立していると仮定する[16]．このとき，裁定機会が存在することを示そう[17]．時刻 $t-1$ までは何の取引も行わない．時刻 t において $C_t^A \geq C_t^E$ であれば引き続き取引を行わない．もし $C_t^A < C_t^E$ であれば，表 3.1 にあるような戦略を取る．つまり，1 単位のヨーロッパ型オプションを売却し，1 単位のアメリカ型オプションを購入する．さらに，時刻 t におけるキャッシュフローを 0 にするために，$C_t^E - C_t^A$ 円分の安全資産を購入[18]．購入したアメリカ型オプションはいつでも行使することができるが，満期で行使して $(S_T - K)^+$ を得る．同時に，売却したヨーロッパ型オプションは満期 T において行使されるので，$(S_T - K)^+$ を支払う．また，満期において安全資産を売却[19]すると，$(1+r)^{T-t}(C_t^E - C_t^A)(> 0)$ を得る．満期でのキャッシュフローは正になるので，これは裁定機会である．これは無裁定条件に矛盾する．よって，任意の $t = 0, 1, \ldots, T-1$ に対して，$C_t^A \geq C_t^E$ が成立する[20]．

---

[15] 満期日以前に行使すること．期前行使ということもある．

[16] C_t^A,C_t^E は確率変数であることに注意．

[17] 元々から取引可能である安全資産，危険資産の他に，アメリカ型とヨーロッパ型のコールオプションを追加し，合計 4 つの資産を用いて裁定機会を構成する．

[18] 銀行に預ける，または貸し付けると考えて差し支えない．

[19] 預金をすべて降ろす，または貸し付けたものをすべて返済してもらう．

[20] もちろん，ここでは背理法を用いている． 命題「ある t に対し $\mathbf{P}(C_t^A < C_t^E) > 0$」を否定すると,「任意の t に対し $C_t^A \geq C_t^E$」となる．ここで否定命題の作り方を紹介しよう．存在記号を用いて元の命題を記述すると「$\exists t \in \{0, \ldots, T-1\}$, $\mathbf{P}(C_t^A < C_t^E) > 0$」となる．このような命題を否定する際は，存在記号と全称記号を入れ替え,「,」以降の式を否定すればよい．従って，確率は非負なので，否定命題は「$\forall t \in \{0, \ldots, T-1\}$, $\mathbf{P}(C_t^A < C_t^E) = 0$」となる．$\mathbf{P}(C_t^A < C_t^E) = 0$ は $\mathbf{P}(C_t^A \geq C_t^E) = 1$ と同値で，さらに「任意の $\omega \in \Omega$ に対して，

	時刻 t	キャッシュフロー	時刻 T	キャッシュフロー
ヨーロッパ型オプション	売却	C_t^E	行使	$-(S_T-K)^+$
アメリカ型オプション	購入	$-C_t^A$	行使	$(S_T-K)^+$
安全資産	貸付	$-C_t^E+C_t^A$	支払	$(1+r)^{T-t}(C_t^E-C_t^A)$
合計		0		>0

表 3.1: $C_t^A < C_t^E$ とした場合の裁定機会

次に，ある $t=0,1,\dots,T-1$ において $\mathbf{P}(C_t^A > C_t^E) > 0$ であると仮定する．上記と同様にして裁定機会を構成する．時刻 t において $C_t^A > C_t^E$ であれば，表 3.2 で示すように，アメリカ型オプションを 1 単位売却，ヨーロッパ型を 1 単位購入，かつ，安全資産を $C_t^A - C_t^E$ 円分購入する． 売却したアメリカ型オプションが，時刻 $u \in \{t, t+1, \dots, T\}$ で行使されたとしよう．このとき，時刻 u で $(S_u-K)^+$ を支払う．この支払いを実行するため，時刻 u において危険資産を 1 単位空売りし，新たに安全資産を K 円購入する．ここで，$S_u \geq K$ であると仮定して良い[21)]．さもなければ，アメリカ型オプションの買い手は時刻 u で行使しないからである．結局，時刻 u における安全資産の保有量は $(1+r)^{u-t}(C_t^A - C_t^E) + K$ である．満期において安全資産をすべて売却し，空売りを精算し，保有しているヨーロッパ型オプションを行使すると，キャッシュフローの合計は

$$
\begin{aligned}
&(1+r)^{T-t}(C_t^A - C_t^E) + (1+r)^{T-u}K - S_T + (S_T-K)^+ \\
&\geq (1+r)^{T-t}(C_t^A - C_t^E) + K - S_T + (S_T-K)^+ \\
&\geq (1+r)^{T-t}(C_t^A - C_t^E) > 0
\end{aligned}
$$

となる．これより，裁定機会となる．以上より，定理 3.4 が成立する． □

	時刻 t	Cashflow	時刻 u	Cashflow	時刻 T	Cashflow
ヨーロッパ型	購入	$-C_t^E$			行使	$(S_T-K)^+$
アメリカ型	売却	C_t^A	行使	$-(S_u-K)^+$		
危険資産			空売り	S_u	精算	$-S_T$
安全資産	貸付	$C_t^E - C_t^A$	貸付	$-K$	支払	下記参照
合計		0		0		>0

時刻 T における安全資産のキャッシュフロー $= (1+r)^{T-t}(-C_t^E + C_t^A) + (1+r)^{T-u}K$.

表 3.2: $C_t^A > C_t^E$ とした場合の裁定機会

この定理と前節の命題 3.2 を合わせれば，任意の $t=0,1,\dots,T$ に対して

$$
C_t^A = C_t^E = \frac{1}{(1+r)^{T-t}}\mathbf{E_Q}[(S_T-K)^+|S_t] \tag{3.2.1}
$$

$C_t^A(\omega) \geq C_t^E(\omega)$」と書ける．つまり，「任意の $t \in \{0,\dots,T-1\}$ に対して $C_t^A \geq C_t^E$」となる．

[21)] $S_u \geq K$ なる時刻 u が発生しなかった場合は，空売りや安全資産の追加購入は行わない．そのような場合も含めてこの戦略は裁定機会になっている．

が成立する．アメリカ型オプションの買い手は，各時刻 $t = 0, 1, \ldots, T-1$ においてオプションを行使するか判断しなければならない．つまり，時刻 t で行使した際に受け取れるペイオフ $(S_t - K)^+$ と，行使せずに次の取引時刻までオプションを保有することの価値 V_t^A とを比較し，$(S_t - K)^+ > V_t^A$ ならば行使し，そうでなければ行使しない[22]．言い換えれば，

$$C_t^A = \max\{(S_t - K)^+, V_t^A\} \tag{3.2.2}$$

が成立する．ここで V_t^A を計算しよう．次の取引時刻 $t+1$ におけるオプション価格は C_{t+1}^A であり，これをペイオフとするオプションの時刻 t における価格と V_t^A は等しいから，

$$V_t^A = \frac{1}{1+r}\mathbf{E_Q}[C_{t+1}^A | S_t]$$

となる．そこで，(3.1.8) と同様にして，(3.2.1) を用いれば

$$V_t^A = \frac{1}{(1+r)^{T-t}}\mathbf{E_Q}[(S_T - K)^+ | S_t]$$

を得る．よって，(3.2.1) 及び (3.2.2) より

$$(S_t - K)^+ \leq \frac{1}{(1+r)^{T-t}}\mathbf{E_Q}[(S_T - K)^+ | S_t]$$

が，任意の $t = 0, 1, \ldots, T$ に対して成立することが分かる．

ここまでに得られた結果を一般化しよう．コールではなく，ペイオフが関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を用いて表される場合を考える．なお，この関数 f をペイオフ関数と呼ぼう[23]つまり，時刻 t で行使した場合のペイオフは $f(S_t)$ である．これまでと同様，同じペイオフ関数を持つアメリカ型とヨーロッパ型オプションを同時に考える．ここで，ペイオフ関数が f であるアメリカ型，ヨーロッパ型オプションの時刻 t における価格を，それぞれ $C_t^{A,f}$，$C_t^{E,f}$ と記述する．

定理 3.5 ペイオフ関数 f が**凸** (convex) で，$f(0) = 0$ を満たすとき，任意の $t = 0, \ldots, T$ に対して $C_t^{A,f} = C_t^{E,f}$ が成立する．なお，関数 f が凸であるとは，任意の $x, y \in \mathbb{R}$ と任意の $\alpha \in [0, 1]$ に対して

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

を満たすときにいう[24]．

行使価格 $K(> 0)$ のコールオプションのペイオフ関数は $f(x) = (x - K)^+$ であるから，定理の条件を満たしている．よって，定理 3.5 は定理 3.4 を拡張している．ここで，定理 3.5 の証明に入る前に，以下の補題を証明なしで紹介する．

[22] $(S_t - K)^+ = V_t^A$ であるときは，行使してもしなくても同じである．
[23] ペイオフ関数は一般的な用語ではない．
[24] 凸性の定義では関数の微分可能性について触れていないが，もし f が 2 回微分可能であれば，f が凸であるとは，$f'' \geq 0$ であることと同値である．

補題 3.6 (Jensen の不等式[25]) 凸関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して，$\mathbf{E}[f(X)] \geq f(\mathbf{E}[X])$ が成立する．

問 3.7 $f(x) = x^2$ が凸関数であることを確認し，この関数に対して Jensen の不等式が成立していることを証明せよ．

証明. まず，$C_T^{A,f} = C_T^{E,f}$ である．今，$C_{t+1}^{A,f} = C_{t+1}^{E,f}$ であると仮定する．このとき，(3.2.2) で述べたように，

$$C_t^{A,f} = \max\left\{f(S_t), \frac{1}{1+r}\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[C_{t+1}^{A,f}|S_t]\right\} = \max\left\{f(S_t), \frac{1}{1+r}\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[C_{t+1}^{E,f}|S_t]\right\}$$

となる．さらに，

$$C_t^{E,f} = \frac{1}{1+r}\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[C_{t+1}^{E,f}|S_t]$$

であり，f に関する条件と補題 3.6 より，

$$\begin{aligned} C_t^{E,f} &= (1+r)^{-(T-t)}\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[f(S_T)|S_t] \\ &= \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left[(1+r)^{-(T-t)}f(S_T) + \left(1-(1+r)^{-(T-t)}\right)f(0)\middle|S_t\right] \\ &\geq \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left[f\left((1+r)^{-(T-t)}S_T + 0\right)\middle|S_t\right] \\ &\geq f\left(\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left[(1+r)^{-(T-t)}S_T\middle|S_t\right]\right) = f(S_t) \end{aligned}$$

となり，$C_t^{A,f} = C_t^{E,f}$ を得る．故に，定理 3.5 が成立する． □

3.2.2 アメリカ型プットオプション

行使価格 K のプットオプションのペイオフ関数は $f(x) = (K-x)^+$ であり，これは凸であるが，$f(0) \neq 0$ であるため定理 3.5 を適用できない．実際，以下の例にあるように，**アメリカ型プットオプションでは満期以前に行使が行われる可能性がある．**

例 3.7 以下の 3 期間 2 項モデルと行使価格 80 のアメリカ型プットオプションを考える．なお，無裁定条件を満たすため，ショートレート r は $0 < r < \frac{1}{2}$ を満たしていると仮定する．また，時刻 t におけるオプション価格を P_t^A と書く．

$S_2 = 20$ であるとき, P_2^A の値は

$$P_2^A = \max\left\{(K-S_2)^+, \frac{1}{1+r}\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[(K-S_3)^+|S_2 = 20]\right\}$$

[25] Jensen をカタカナ表記するときは,「イェンセン」のように書く．

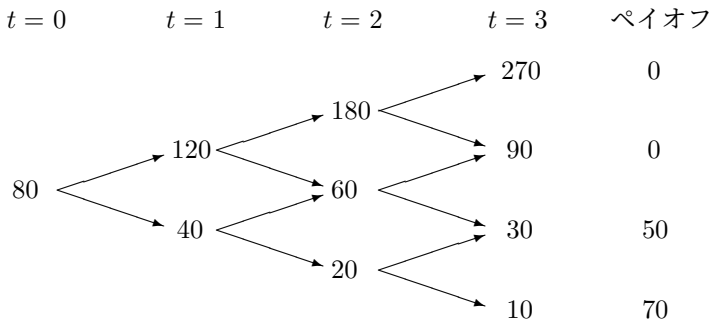


図 3.8: 危険資産価格の変動とオプションペイオフ

$$= \max\left\{60, \frac{50q_u + 70(1-q_u)}{1+r}\right\}$$
$$= \max\left\{60, \frac{60-20r}{1+r}\right\} = 60$$

となる．なお，$q_u := \mathbf{Q}(S_1 = 120) = \frac{1}{2} + r$ である．この場合，時刻 2 においてオプションは行使される．

次に，$S_2 = 60$ のノードについて考察しよう．

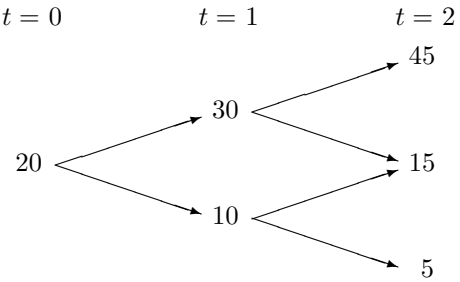
$$P_2^A = \max\left\{(K-S_2)^+, \frac{1}{1+r}\mathbf{E_Q}[(K-S_3)^+|S_2=60]\right\}$$
$$= \max\left\{20, \frac{0\times q_u + 50(1-q_u)}{1+r}\right\}$$
$$= \max\left\{20, \frac{25-50r}{1+r}\right\}$$

であるから，$r > \frac{5}{70}$ であるとき早期行使が行われる．

問 3.8 例 3.7 における P_0^A を，$r > \frac{5}{70}$ と $r \leq \frac{5}{70}$ の場合に分けて計算せよ．

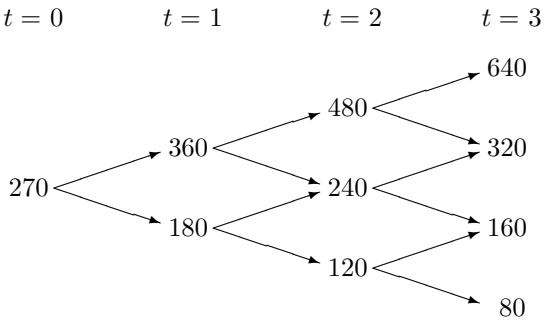
第 3 章　章末問題

3-1　以下の金利 $r = 0.1$ である 2 期間 2 項モデルを考える:



1. S_1 及び S_2 のマルチンゲール確率下における分布を求めよ．
2. 行使価格 40 のヨーロッパ型コールオプションの複製戦略と価格を求めよ．
3. 行使価格 14 のアメリカ型プットオプションの価格を求めよ．また，早期行使の可能性について議論せよ．

3-2 以下の 3 期間 2 項モデルを考える．ただし，金利は 0 とする．



1. $\mathbf{Q}$ をマルチンゲール確率とするとき，$\mathbf{Q}(S_3 = 320)$ の値を求めよ．
2. 行使価格 120 のアメリカ型コールオプションの価格を求めよ．
3. 行使価格 130 のアメリカ型プットオプションの価格を求めよ．
4. 上記 2 つのオプションに関して，早期行使の可能性について議論せよ．

3-3 金利 $r \geq 0$ の T 期間 2 項モデルを考える．以下の不等式が成立することを証明せよ:

$$S_0 - \frac{K}{(1+r)^T} \geq C_0 - P_0 \geq S_0 - K.$$

ただし，S_0 は $t = 0$ における危険資産価格，C_0 と P_0 は，それぞれ行使価格の K のアメリカ型コールオプションとプットオプションの価格である．この不等式は，アメリカ型オプションに対するプットコールパリティである言えよう．

3-4 金利 0 の多期間 2 項モデルにおけるアメリカ型プットオプションでは早期行使は起こらないことを示せ[26)]．

[26)] 金利が負の場合も同様の結果が成り立つ．

第4章　Black-Scholesモデルとその発展

この章では，代表的な連続時間モデルである Black-Scholes モデルを多期間2項モデルの極限として構成し，ヨーロッパ型コールオプションに対する価格公式である Black-Scholes 公式を導く．後半は，Black-Scholes モデルにおける複製ポートフォリオであるデルタヘッジや，ボラティリティの推定方法など，Black-Scholes モデルの発展的内容を扱う．

Black-Scholes モデルを学ぶには Brown 運動や確率微分方程式など高度な数学を必要とする．これらの事項をきちんと学ぶにはかなりの時間と労力を要するが，数学的正確性を犠牲にした直感的説明も可能である．本講義では，確率論や微積分に関する高度な議論と直感的説明とを織り交ぜ，経済学部の講義として成立し得るギリギリのレベルでの説明を試みる．

4.1　モデルの導出とオプション価格公式

1つの危険資産と1つの安全資産からなる満期 $T > 0$ の連続時間金融市場モデルを考える．時刻 $t \in [0, T]$ における安全資産の価格を B_t と記述する．安全資産価格は連続複利に基づいて変動するものとする．よって，市場金利を $r \geq 0$ とすれば，$B_t = e^{rt}$ と表示される．また，時刻 $t \in [0, T]$ における危険資産価格を S_t と書く．この S_t が

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(r + \mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t\right\} \tag{4.1.1}$$

と書けるとき，この金融市場モデルを **Black-Scholes モデル** (以下，BS モデル) という．ただし，$S_0 > 0, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ であり，$\{W_t\}_{t\in[0,T]}$ は標準 Brown 運動である[1)]．なお，μ をドリフト係数，σ を**ボラティリティ**(volatility) という．このように対数を取るとドリフト付き Brown 運動になる確率過程を**幾何 Brown 運動** (geometric Brownian motion) という．つまり，BS モデルとは危険資産価格過程が幾何 Brown 運動で記述されるモデルである．

注意 4.1 証明は省くが，(4.1.1) で与えた BS モデルは無裁定条件を満たす完備市場モデルであり，離散時間モデルと同様の資産価格理論の基本定理が成

[1)] Brown 運動の定義については A.4.2 節を参照のこと．

り立ち，マルチンゲール確率が一意に存在する．ただし，3.1.3 節で紹介した倍々戦略と同様の裁定機会が生じてしまうため，投資家が選択できるポートフォリオに制限を設ける必要がある[2)]．□

注意 4.2 第 2 章や第 3 章で紹介した離散時間モデルは，有限標本空間を持ち，その数学的構造も比較的単純である．それ故，対応する確率空間やフィルトレーション[3)]を具体的に書き下すことができる．一方，BS モデルにおける標本空間は無限集合であり，複雑な数学的構造を持つため，本講義では確率空間やフィルトレーションを具体的に与えることはしない．なお，フィルトレーション $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ について，$\mathcal{F}_t$ とは時刻 t までに得られる情報のことであるが，これは時刻 0 から t まで危険資産価格を観測して得られる情報と理解しておけば十分である．□

4.1.1 Black-Scholes モデルの導出

この小節では，多期間 2 項モデルの極限として BS モデルを導出する．これは，A.4.3 節で紹介したランダムウォークの極限による Brown 運動の導出を用いて行われる．

自然数 n を一つ固定する．時間区間 $[0,T]$ を n 等分した n 期間 2 項モデルを構築する．まず，取引時刻は $\dfrac{kT}{n}$, $k=0,1,2,\dots,n$ であることに注意しよう．また，安全資産価格は連続複利を用いず，$\dfrac{T}{n}$ を複利期間とする．よって，時刻 $\dfrac{kT}{n}$ における安全資産価格を $B_k^{(n)}$ とすれば，

$$B_k^{(n)} = \left(1+\frac{rT}{n}\right)^k \tag{4.1.2}$$

となる．

問 4.1 $n\to\infty$ としたとき，任意の $t\in[0,T]$ に対して，安全資産価格は $B_t = e^{rt}$ に収束することを確認せよ．

さらに，$\{Z_k^{(n)}\}_{k=1,2,\dots,n}$ を i.i.d. 確率変数列で，その分布が

$$\mathbf{P}(Z_k^{(n)} = u^{(n)}) = p^{(n)}, \quad \mathbf{P}(Z_k^{(n)} = d^{(n)}) = 1-p^{(n)}$$

であるものとする．ただし，無裁定条件も考慮し，$u^{(n)} > 1+\dfrac{rT}{n} > d^{(n)} > 0$, $0<p^{(n)}<1$ とする．このとき，時刻 $\dfrac{kT}{n}$ における危険資産価格 $S_k^{(n)}$ は，$k=1,2,\dots,n$ のとき，

$$S_k^{(n)} = Z_k^{(n)} S_{k-1}^{(n)}$$

[2)] 詳しくは，[7, 関根] などを参照せよ．
[3)] 3.1.2 節を参照のこと．

と書けるものとする．なお，$S_0^{(n)}$ は n に依らない定数 $S_0 > 0$ とする．

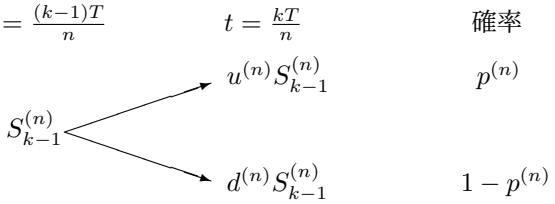


図 4.1: 危険資産の価格変動

よって，$S_k^{(n)} = S_0 Z_1^{(n)} Z_2^{(n)} \cdots Z_k^{(n)}$ であるから，対数を取ると，

$$\log S_k^{(n)} = \log S_0 + \sum_{j=1}^{k} \log Z_j^{(n)}$$

が成り立つ．ここで，確率変数列 $\{\log Z_j^{(n)}\}$ も i.i.d. であることに注意しよう．つまり，$\{\log S_k^{(n)}\}$ はランダムウォークになる．そこで，$n \to \infty$ としたとき $\{\log S_k^{(n)}\}$ がドリフト付き Brown 運動 $\mu' t + \sigma W_t$ に収束するように $u^{(n)}, d^{(n)}, p^{(n)}$ を設定する．ただし，$\mu' := r + \mu - \dfrac{\sigma^2}{2}$ である．ここで A.4.3 節の議論を踏まえると，

$$\log u^{(n)} = \sigma\sqrt{\frac{T}{n}}, \quad \log d^{(n)} = -\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}, \quad p^{(n)} = \frac{1}{2} + \frac{\mu'}{2\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}} \tag{4.1.3}$$

とおけば良いことが分かる．

問 4.2 (4.1.3) が正しいことを確認せよ．

問 4.3 (4.1.3) の下，十分大きい n に対して $u^{(n)} > 1 + \dfrac{rT}{n} > d^{(n)}$ が成立していることを示せ．

4.1.2 マルチンゲール確率

時刻 $t \in [0, T]$ における危険資産の割引価格 $\widetilde{S}_t$ は，

$$\widetilde{S}_t = B_t^{-1} S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t\right\} \tag{4.1.4}$$

となる．第 3 章で紹介したように，離散時間モデルにおけるマルチンゲール確率は，割引資産価格をマルチンゲール[4)]にする確率として定義された．これは連続時間モデルでも同様である．

問 4.4 マルチンゲールの定義を確認し，標準 Brown 運動がマルチンゲールであることを証明せよ．

[4)] マルチンゲールの定義については A.1.4 節を参照せよ．

まず，以下の命題を示そう．

命題 4.3 $\mu = 0$ のとき，確率過程 $\{\widetilde{S}_t\}$ はマルチンゲールである．

証明. $\mu = 0$ のとき，任意の $0 \leq s < t \leq T$ に対して，

$$\widetilde{S}_t = S_0 \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t\right\} = \widetilde{S}_s \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}(t-s) + \sigma(W_t - W_s)\right\}$$

が成り立つ．ここで，Brown 運動の独立増分性より

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\widetilde{S}_t|\widetilde{S}_s] &= \mathbf{E}\left[\widetilde{S}_s \exp\left\{\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s) + \sigma(W_t - W_s)\right\}\middle|\widetilde{S}_s\right] \\
&= \widetilde{S}_s \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}(t-s)\right\} \mathbf{E}\left[e^{\sigma(W_t - W_s)}\middle|\widetilde{S}_s\right] \\
&= \widetilde{S}_s \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}(t-s)\right\} \mathbf{E}\left[e^{\sigma(W_t - W_s)}\right]
\end{aligned}$$

となる．$W_t - W_s$ は正規分布 $N(0, t-s)$[5] に従うから

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[e^{\sigma(W_t - W_s)}\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma x} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2(t-s)}\right\} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma\sqrt{t-s}x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x - \sigma\sqrt{t-s})^2}{2} + \frac{\sigma^2(t-s)}{2}\right\} dx \\
&= \exp\left\{\frac{\sigma^2(t-s)}{2}\right\}
\end{aligned}$$

となる[6]．なお，2 つ目の等号は，$x/\sqrt{t-s}$ を改めて x として置換積分を行った．以上より，$\mathbf{E}\left[\widetilde{S}_t|\widetilde{S}_s\right] = \widetilde{S}_s$ が成り立つので，$\{\widetilde{S}_t\}$ はマルチンゲールである． □

ここで，各 $t \in [0, T]$ に対して，

$$W_t^{\mathbf{Q}} := W_t + \frac{\mu}{\sigma}t \tag{4.1.5}$$

とおくと，(4.1.4) より

$$\widetilde{S}_t = S_0 \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t^{\mathbf{Q}}\right\}$$

と書けるので，命題 4.3 を踏まえると，マルチンゲール確率とは $\{W_t^{\mathbf{Q}}\}$ を標準 Brown 運動にする確率測度であると予想できる．そこで唐突であるが，確率測度 $\mathbf{Q}$ を

$$\mathbf{Q}(A) := \int Z_T^{\mathbf{Q}} \mathbf{1}_A d\mathbf{P}, \quad A \in \mathcal{F}, \tag{4.1.6}$$

[5] 正規分布については A.2.3 節を参照のこと．
[6] これは正規分布の積率母関数である．

と定義する．ただし，$\mathbf{1}_A$ は定義関数[7]であり，

$$Z_T^{\mathbf{Q}} := \exp\left\{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}T - \frac{\mu}{\sigma}W_T\right\}$$

である．また，(4.1.6) の積分はルベーグ積分であるが，(A.2.2) にあるように，$\mathbf{Q}(A) = \mathbf{E}[Z_T^{\mathbf{Q}}\mathbf{1}_A]$ と書くこともできる．なお，$\mathbf{Q}$ が確率測度であることは以下の 3 点より分かる: (1) 命題 4.3 より $\mathbf{Q}(\Omega) = \mathbf{E}[Z_T^{\mathbf{Q}}\mathbf{1}_\Omega] = \mathbf{E}[Z_T^{\mathbf{Q}}] = 1$ であること，(2) $Z_T^{\mathbf{Q}} > 0$ a.s. であるから，任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して $\mathbf{Q}(A) \geq 0$ となること，及び，(3) $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ が互いに素であるとき，

$$\mathbf{1}_{\cup_{n=1}^{\infty} A_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n}$$

が成り立つこと．なお，$Z_T^{\mathbf{Q}}$ を ($\mathbf{Q}$ の $\mathbf{P}$ に関する)**Radon-Nikodym 導関数** (Radon-Nikodym derivative) といい，$\dfrac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$ と表すこともある．さらに，確率変数 X に対して

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[X] = \int_\Omega X d\mathbf{Q} = \int_\Omega X Z_T^{\mathbf{Q}} d\mathbf{P} = \mathbf{E}[X Z_T^{\mathbf{Q}}] \tag{4.1.7}$$

が成立する．

問 4.5 上記の (1)-(3) を示し，$\mathbf{Q}$ が確率測度であることを確率測度の定義に照らし合わせて確認せよ．

同値マルチンゲール測度 さらに (2) を強めて，$\mathbf{P}(A) = 0$ であることと，$\mathbf{Q}(A) = 0$ であることが同値であることも示せる．このとき，2 つの確率測度 $\mathbf{P}$ と $\mathbf{Q}$ は**同値** (equivalence) であるという．この同値性は，離散時間モデルにおいて，マルチンゲール確率 q を $0 \leq q \leq 1$ でなく $0 < q < 1$ に限定したことに相当する．連続時間モデルにおいてはマルチンゲール確率を $\mathbf{P}$ と同値なものに限ることが多く，そのようなマルチンゲール確率を**同値マルチンゲール測度** (equivalent martingale measure) と呼ぶ． □

確率過程 $\{W_t^{\mathbf{Q}}\}$ が $\mathbf{Q}$ の下で Brown 運動であることを示したいのだが，確率過程の収束を示すことは難しいので，ここでは正規分布に従うことを示すに留める．

命題 4.4 任意の $t \in [0,T]$ に対して，$W_t^{\mathbf{Q}}$ は $\mathbf{Q}$ の下で $N(0,t)$ に従う．

証明. $\mathbf{Q}$ の下での特性関数 $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[e^{i\theta W_t^{\mathbf{Q}}}]$ を導出すれば十分である[8]．なお，$Z_T^{\mathbf{Q}}$ の定義を任意の $t \in [0,T]$ に拡大して，

$$Z_t^{\mathbf{Q}} := \exp\left\{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}t - \frac{\mu}{\sigma}W_t\right\}$$

[7] 定義関数の定義は命題 A.8 の証明を参照せよ．
[8] 特性関数については A.2.4 節を参照のこと．

とおくと，命題 4.3 より $\{Z_t^{\mathbf{Q}}\}$ はマルチンゲールであり，任意の $t \in [0,T]$ に対して $\mathbf{E}[Z_t^{\mathbf{Q}}] = Z_0^{\mathbf{Q}} = 1$ となる[9]．よって，任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left[e^{i\theta W_t^{\mathbf{Q}}}\right] &= \mathbf{E}\left[e^{i\theta W_t^{\mathbf{Q}}} Z_T^{\mathbf{Q}}\right] = \mathbf{E}\left[e^{i\theta W_t} Z_T^{\mathbf{Q}}\right] \exp\left\{\frac{i\theta\mu}{\sigma}t\right\} \\
&= \mathbf{E}\left[e^{i\theta W_t} \frac{Z_T^{\mathbf{Q}}}{Z_t^{\mathbf{Q}}} Z_t^{\mathbf{Q}}\right] \exp\left\{\frac{i\theta\mu}{\sigma}t\right\} \\
&= \mathbf{E}\left[e^{i\theta W_t} Z_t^{\mathbf{Q}}\right] \mathbf{E}\left[\frac{Z_T^{\mathbf{Q}}}{Z_t^{\mathbf{Q}}}\right] \exp\left\{\frac{i\theta\mu}{\sigma}t\right\} = \mathbf{E}\left[e^{i\theta W_t} Z_t^{\mathbf{Q}}\right] \exp\left\{\frac{i\theta\mu}{\sigma}t\right\}
\end{aligned}$$

を得る．なお，最初の等号は (4.1.7) による．また，

$$\frac{Z_T^{\mathbf{Q}}}{Z_t^{\mathbf{Q}}} = \exp\left\{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}(T-t) - \frac{\mu}{\sigma}(W_T - W_t)\right\}$$

であり，これは W_t と独立であることから，4 番目の等号が成立する．さらに，最後の等号は命題 4.3 より得られる．さて，$\mathbf{E}[e^{i\theta W_t} Z_t^{\mathbf{Q}}]$ を計算しよう．$W_t \sim N(0,t)$ であるから，

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[e^{i\theta W_t} Z_t^{\mathbf{Q}}\right] &= \mathbf{E}\left[e^{i\theta W_t} \exp\left\{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}t - \frac{\mu}{\sigma}W_t\right\}\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i\theta x - \frac{\mu^2}{2\sigma^2}t - \frac{\mu}{\sigma}x\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2t}\right\} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i\theta\sqrt{t}y - \frac{\mu^2}{2\sigma^2}t - \frac{\mu\sqrt{t}y}{\sigma}\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i\theta\sqrt{t}y\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\left(y + \frac{\mu\sqrt{t}}{\sigma}\right)^2}{2}\right\} dy \\
&= \phi_Y(\theta\sqrt{t}) = \exp\left\{-i\frac{\mu\sqrt{t}}{\sigma}\theta\sqrt{t} - \frac{1}{2}\theta^2 t\right\}
\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，3 つ目の等号は $y = x/\sqrt{t}$ として置換積分を行った．また，Y は $N\left(-\frac{\mu\sqrt{t}}{\sigma}, 1\right)$ に従う確率変数であり，ϕ_Y は Y の特性関数である．さらに，最後の等号は例 A.7 より得られる．以上まとめると，

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left[e^{i\theta W_t^{\mathbf{Q}}}\right] = \exp\left\{-\frac{1}{2}\theta^2 t\right\}$$

が得られ，$W_t^{\mathbf{Q}}$ は $\mathbf{Q}$ の下で $N(0,t)$ に従う． □

注意 4.5 確率測度を $\mathbf{P}$ から $\mathbf{Q}$ に変換することを，離散時間の視点から考えてみよう．前小節では多期間 2 項モデルの極限として BS モデルを導出した

[9] 問 A.6 を参照のこと．

が，その際に登場した確率 $p^{(n)}$ を

$$q^{(n)} := \frac{1}{2} + \frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}}$$

に取り換え，この確率の下での多期間 2 項モデルの極限がマルチンゲールになっていることを確認する．なお，$q^{(n)}$ は $p^{(n)}$ から μ を含む項を取り除いたものである．

今，$\widetilde{S}_k^{(n)} := (B_k^{(n)})^{-1} S_k^{(n)}$ とし，$n \to \infty$ としたとき，これがマルチンゲールに収束することを確認する．まず，(4.1.2) より

$$\widetilde{S}_k^{(n)} = \left(1 + \frac{rT}{n}\right)^{-k} S_k^{(n)} = \left(1 + \frac{rT}{n}\right)^{-k} Z_k^{(n)} S_{k-1}^{(n)} = \left(1 + \frac{rT}{n}\right)^{-1} Z_k^{(n)} \widetilde{S}_{k-1}^{(n)}$$

となる．ここで，$q^{(n)}$ の下での $Z_k^{(n)}$ の期待値を計算すると，(4.1.3) より

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{q^{(n)}}[Z_k^{(n)}] &= q^{(n)} u^{(n)} + (1 - q^{(n)}) d^{(n)} \\
&= \exp\left\{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\right\}\left(\frac{1}{2} + \frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}}\right) \\
&\quad + \exp\left\{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\right\}\left(\frac{1}{2} - \frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}}\right) \\
&= \left(1 + \sigma\sqrt{\frac{T}{n}} + \frac{\sigma^2 T}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}}\right) \\
&\quad + \left(1 - \sigma\sqrt{\frac{T}{n}} + \frac{\sigma^2 T}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}}\right) \\
&= 1 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{T}{n} + \frac{\sigma^2 T}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{rT}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

を得る[10]．ただし，3 つ目の等号はテイラーの定理による[11]．よって，

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{q^{(n)}}[\widetilde{S}_k^{(n)} | \widetilde{S}_{k-1}^{(n)}] &= \left(1 + \frac{rT}{n}\right)^{-1}\left(1 + \frac{rT}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\widetilde{S}_{k-1}^{(n)} \\
&= \left\{1 + \frac{o(1/n)}{1 + \frac{rT}{n}}\right\}\widetilde{S}_{k-1}^{(n)}
\end{aligned}$$

となり，$n \to \infty$ とすればマルチンゲールに収束する．つまり，$\mathbf{Q}$ の下での BS モデルは，多期間 2 項モデルにおける確率 $p^{(n)}$ を $q^{(n)}$ に取り換えたものに相当している． □

---

[10] $o(1/n)$ は，$n \to \infty$ としたとき，$1/n$ より速く 0 に収束する項を表している．つまり，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{1/n} = 0$ となる $f(n)$ のことで，$f(n) = cn^{-a}$，$c \in \mathbb{R}$，$a > 1$，が典型例である．

[11] テイラーの定理については，微分積分学に関するどの教科書にも出ている．

4.1.3 Black-Scholes 公式

BS モデルにおけるヨーロピアンコールオプションの価格公式を導出する．危険資産価格過程 $\{S_t\}$ が (4.1.1) で与えられる金利 $r \geq 0$, 満期 $T > 0$ の BS モデルを考える．(4.1.5) によって $\{W_t^{\mathbf{Q}}\}$ を定義すれば，これはマルチンゲール確率 $\mathbf{Q}$ の下で Brown 運動となり，$\{S_t\}$ は

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t^{\mathbf{Q}}\right\} \tag{4.1.8}$$

と記述される．この表現にドリフト係数 μ は含まれていない．オプション価格はマルチンゲール確率の下で議論されるため，**μ はオプション価格公式には登場しない．**

権利行使価格 $K > 0$ のヨーロピアンコールオプションを考えよう．このオプションの時刻 $t \in [0, T]$ における価格を，t と資産価格 S_t の関数と見なし，$C(t, S_t)$ と記述する．多期間 2 項モデルからの類推で，任意の $t \in [0, T]$ に対して，

$$C(t, S_t) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left[e^{-r(T-t)}(S_T - K)^+ | S_t\right] \tag{4.1.9}$$

が成立しているものとして議論を進める[12)]．なお，$C(T, S_T) = (S_T - K)^+$ である．以下，$t < T$ として，$C(t, S_t)$ の値を計算しよう．

まず，(4.1.8) より

$$\begin{aligned} S_T &= S_0 \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t^{\mathbf{Q}}\right\} \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma(W_T^{\mathbf{Q}} - W_t^{\mathbf{Q}})\right\} \\ &= S_t \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma(W_T^{\mathbf{Q}} - W_t^{\mathbf{Q}})\right\} \end{aligned}$$

である．Brown 運動の独立増分性と定常増分性より，$X := W_T^{\mathbf{Q}} - W_t^{\mathbf{Q}}$ とすると $X \sim N(0, T-t)$ であり，よって，$\tau := T - t$ とすると

$$\begin{aligned} C(t, S_t) &= \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left[e^{-r\tau}(S_T - K)^+ | S_t\right] \\ &= \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left[\left(e^{-r\tau} S_t \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma X\right\} - e^{-r\tau}K\right)^+ \middle| S_t\right] \\ &= \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left[\left(S_t \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}\tau + \sigma X\right\} - e^{-r\tau}K\right)^+ \middle| S_t\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(S_t \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}\tau + \sigma x\right\} - e^{-r\tau}K\right)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\tau}\right\} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(S_t \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}\tau + \sigma\sqrt{\tau}y\right\} - e^{-r\tau}K\right)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy \end{aligned}$$

[12)] 実際，これは正しい．しかし，この式の正当性について議論するには複製戦略を用いる必要があり，この段階ではまだ準備が足りない．詳しくは 73 ページを見よ．

を得る．最後の等号は置換積分による．ここで，

$$S_t \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}\tau + \sigma\sqrt{\tau}y\right\} - e^{-r\tau}K = 0 \Longleftrightarrow y = \frac{\log\frac{K}{S_t} - r\tau + \frac{\sigma^2}{2}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

であるから，この y の値を d とすれば，

$$\begin{aligned} C(t,S_t) &= \int_d^\infty \left(S_t \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}\tau + \sigma\sqrt{\tau}y\right\} - e^{-r\tau}K\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}dy \\ &= \int_d^\infty S_t \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}\tau + \sigma\sqrt{\tau}y\right\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}dy \\ &\quad - \int_d^\infty e^{-r\tau}K\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}dy \end{aligned}$$

となる．ここで，F_N を標準正規分布の分布関数とする．つまり，

$$F_N(u) := \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}dx, \quad u \in \mathbb{R},$$

とすれば，$F_N(u) = 1 - F_N(-u)$ が成り立つので，第 2 項は $-e^{-r\tau}KF_N(-d)$ に等しい．また，第 1 項は

$$\begin{aligned} \text{第 1 項} &= S_t \int_d^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(y-\sigma\sqrt{\tau})^2}{2}\right\}dy \\ &= S_t \int_{d-\sigma\sqrt{\tau}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}dz \\ &= S_t F_N(-d+\sigma\sqrt{\tau}) \end{aligned}$$

となる．ここで得られた結果を定理としてまとめておこう:

定理 4.6 (Black-Scholes 公式) 任意の $t \in [0,T)$ に対して，

$$C(t,S_t) = S_t F_N(d_+) - e^{-r\tau}KF_N(d_-) \tag{4.1.10}$$

が成立する．ただし，$d_+ := -d + \sigma\sqrt{\tau}$, $d_- := -d$ とおく．つまり，

$$d_\pm := \frac{\log\frac{S_t}{K} + r\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \pm \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}$$

である．

(4.1.10) を **Black-Scholes 公式** (Black-Scholes formula) といい，以下，BS 公式と略記する．なお，(4.1.10) の右辺の $t \to T$ とした極限は $(S_T - K)^+$ である．

問 4.6 ここで述べた極限が $(S_T - K)^+$ であることを確認せよ．

プットコールパリティ プットコールパリティとは，同じ権利行使価格を持つコールオプションとプットオプションの価格の間に成り立つ関係式のことである．2.1.2 節の (2.1.1) は 1 期間 2 項モデルに対するプットコールパリティであるが，連続時間モデルでも同様の式が成り立つ．ただし，連続複利を考慮する．より具体的には，権利行使価格 $K > 0$，満期 $T > 0$ のコールオプションとプットオプションの時刻 $t \in [0, T]$ における価格を，それぞれ $C(t, S_t)$，$P(t, S_t)$ とすると，関係式

$$C(t, S_t) - P(t, S_t) = S_t - e^{-r(T-t)}K \tag{4.1.11}$$

が成立する．これは，時刻 t でプットオプションと危険資産を 1 単位購入し，コールオプションを 1 単位売却するポートフォリオの満期時点でのキャッシュフローが必ず K になることから求まる．このプットコールパリティを用いれば，プットオプションに対するオプション価格公式もすぐに得られる． □

4.2 Black-Scholes モデルの発展

この節では，金利 $r \geq 0$, 満期 $T > 0$，ボラティリティ $\sigma > 0$ の BS モデルを考える．つまり，時刻 $t \in [0, T]$ における危険資産価格 S_t は，(4.1.8) によって与えられる．しかし，以後の議論はすべてマルチンゲール確率 $\mathbf{Q}$ の下で行われるので，$W_t^{\mathbf{Q}}$ を単に W_t と記述することにする．よって，この節において S_t は

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right\} \tag{4.2.1}$$

と記述される確率過程とする．ただし，$\{W_t\}$ は $\mathbf{Q}$ の下での Brown 運動である．なお，予め断っておくが，この節ではかなり高度な数学を用いる．その一方，正確な議論を行おうとすれば膨大な数学的準備を必要とする箇所も多い．そのため，議論の正確性を犠牲にしている箇所もある．

4.2.1 Black-Scholes 確率微分方程式

(4.2.1) における S_t を，t と W_t の 2 変数関数と見なす．つまり，

$$f(t, x) := S_0 \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma x\right\}$$

とおけば，$S_t = f(t, W_t)$ となる．ここで，2 変数関数のテイラーの定理を用いると，

$$f(s, y) = f(t, x) + \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)(s - t) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)(y - x) + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, x)(s - t)^2\right.$$

$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x}(t,x)(y-x)(s-t)+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)(y-x)^2\Bigg\}+\text{高次項} \tag{4.2.2}$$

であるから[13]，Δt を十分小さな正の数として，$s=t+\Delta t$, $x=W_t$，$y=W_{t+\Delta t}$ とすれば，

$$S_{t+\Delta t}=S_t+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)S_t\Delta t+\sigma S_t(W_{t+\Delta t}-W_t)+\frac{1}{2}\Bigg\{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 S_t(\Delta t)^2$$
$$+2\sigma\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)S_t(W_{t+\Delta t}-W_t)\Delta t+\sigma^2 S_t(W_{t+\Delta t}-W_t)^2\Bigg\}+\text{高次項}$$

が成立する．ここで，右辺の S_t を左辺に移し，$\Delta t\to 0$ とする．このとき，$\Delta t=(t+\Delta t)-t$ であることに注意し，

$$dS_t:=\lim_{\Delta t\to 0}(S_{t+\Delta t}-S_t),\quad dW_t:=\lim_{\Delta t\to 0}(W_{t+\Delta t}-W_t),\quad dt:=\lim_{\Delta t\to 0}\Delta t$$

と定義する．なお，dW_t は Brown 運動の微分に相当するものであるが，ここではその正確な意味については議論しない[14]．ただし，以下の計算上のルール[15]が成り立つことに注意する:

$$dW_t dt=0,\quad (dt)^2=0,\quad (dW_t)^2=dt,\quad \text{高次項}=0. \tag{4.2.3}$$

このルールを適用すると，

$$dS_t=\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)S_t dt+\sigma S_t dW_t+\frac{1}{2}\sigma^2 S_t dt=S_t(rdt+\sigma dW_t) \tag{4.2.4}$$

が成立する．この式は右辺にも確率過程 $\{S_t\}$ が含まれているので，$\{S_t\}$ に関する方程式になっている．このように dW_t を含む微分方程式を**確率微分方程式** (stochastic differential equation, SDE) という．特に，(4.2.4) のことを **Black-Scholes SDE** (以下，BS-SDE) と呼ぶ．または，(4.2.4) の両辺を 0 から t まで積分した形で書き直すと，

$$S_t=S_0+\int_0^t rS_s ds+\int_0^t \sigma S_s dW_s$$

と書ける．なお，右辺第 3 項は Brown 運動の積分であり，**確率積分** (stocahstic integration) という[16]．

---

[13] 念のため断っておくと，$\partial f/\partial t$ は第一変数に関する偏導関数，$\partial f/\partial x$ は第二変数に関する偏導関数であり，$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ と書いた場合，∂t の t は第一変数のことを指しており，(t,x) の t は第一変数の値が t であることを意味している．同じ記号 t でも意味は異なる．

[14] 詳しく論じるためには膨大な時間を必要とする．興味がある者は [5, シュリーヴ] などを参照せよ．

[15] これについても議論はしない．

[16] 確率積分や確率微分方程式を数学的にきちんと扱うにはかなりの準備を必要とするため，これ以上深入りせず，必要となる計算方法だけを紹介している．

問 4.7 $\widetilde{S}_t = B_t^{-1} S_t$ が満たす確率微分方程式を導け.

次に，テイラーの定理から (4.2.4) を導出した過程を一般化する．$f(t,x)$ を $[0,T]\times\mathbb{R}$ 上に定義された関数で，t について 1 回，x について 2 回連続微分可能な関数とする．つまり，$\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ と $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)$ が共に連続であるとする．このとき，(4.2.2) と計算ルール (4.2.3) から，

$$df(t,W_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,W_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,W_t)dW_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,W_t)dt \tag{4.2.5}$$

が成立することが分かる．また，これを $[0,t]$ 上で積分すると，

$$f(t,W_t) = f(0,0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,W_s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,W_s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,W_s)ds \tag{4.2.6}$$

が得られる．ここで得られた式 (4.2.5) 及び (4.2.6) を，**伊藤の公式** (Ito's formula) という[17)]．

問 4.8 伊藤の公式を用いて，$W_T^2 = 2\displaystyle\int_0^T W_t dW_t + T$ が成立していることを確認せよ．

この小節の最後に，伊藤の公式を用いてオプション価格 $C(t,S_t)$ を展開しよう．ただし，2 変数関数 $C(t,x)$ は十分滑らかであるとする[18)]．まず，これは t と S_t の関数であり，t と W_t の関数になっていない．t と W_t については計算ルール (4.2.3) から伊藤の公式が得られたが，S_t については計算ルールが存在しない．しかし，$dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t)$ であり，これは dt と dW_t の和なので，(4.2.3) より，

$$dS_t dt = S_t(rdt+\sigma dW_t)dt = S_t(r(dt)^2 + \sigma dW_t dt) = 0,$$
$$(dS_t)^2 = S_t^2(rdt+\sigma dW_t)^2 = S_t^2(r^2(dt)^2 + 2r\sigma dW_t dt + \sigma^2(dW_t)^2) = \sigma^2 S_t^2 dt$$

が成立し，S_t に関する計算ルールが得られる．さて，$C(t,S_t)$ に伊藤の公式を適用しよう．(4.2.5) の右辺第 3 項の dt は $(dW_t)^2$ であるから，

$$\begin{aligned} dC(t,S_t) &= \frac{\partial C}{\partial t}(t,S_t)dt + \frac{\partial C}{\partial x}(t,S_t)dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t,S_t)(dS_t)^2 \\ &= \frac{\partial C}{\partial t}(t,S_t)dt + S_t\frac{\partial C}{\partial x}(t,S_t)(rdt+\sigma dW_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t,S_t)dt \\ &= \left\{\frac{\partial C}{\partial t}(t,S_t) + rS_t\frac{\partial C}{\partial x}(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t,S_t)\right\}dt \\ &\quad + \sigma S_t\frac{\partial C}{\partial x}(t,S_t)dW_t \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

が成立する．

[17)] ファイナンス関連の文献の中には，これを「伊藤の補題」と呼んでいるものもある．

[18)] 数学で「滑らか」と言った場合は微分ができるという意味であり，「十分滑らか」とは必要な回数の微分ができるという意味である．ここでは伊藤の公式で要求している t について 1 回，x について 2 回連続微分可能であることを意味している．

4.2.2 Black-Scholes 偏微分方程式

連続時間モデルにおける self-financing ポートフォリオについて論じよう．投資家は連続的にポートフォリオを組み替えることが (少なくとも理論上は) 可能となるため，ポートフォリオも連続時間型確率過程で記述される．そこで，確率過程 $\{\alpha_t\}_{t\in[0,T]}$ 及び $\{\beta_t\}_{t\in[0,T]}$ を，それぞれ安全資産及び危険資産の保有量を表す確率過程とする[19)]．従って，ポートフォリオ $\{(\alpha_t,\beta_t)\}$ の価値を表す確率過程 $\{V_t\}$ は，

$$V_t = \alpha_t B_t + \beta_t S_t \tag{4.2.8}$$

と記述される．なお，B_t は安全資産の価格で，$B_t = e^{rt}$ と与えられる．ここで，モデルを離散化する．Δt を十分小さい正の数とし，Δt 毎にポートフォリオを組み替えるものとする．つまり，時刻 $t-\Delta t$ で組んだポートフォリオは時刻 t まで保有され，t で新たなポートフォリオ (α_t,β_t) に組み替えられる．Self-financing とはポートフォリオの組み換え前後で価値が変動しないことであるから，時刻 $t+\Delta t$ では

$$\alpha_t B_{t+\Delta t} + \beta_t S_{t+\Delta t} = \alpha_{t+\Delta t} B_{t+\Delta t} + \beta_{t+\Delta t} S_{t+\Delta t}$$

が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned} V_{t+\Delta t} - V_t &= \alpha_{t+\Delta t} B_{t+\Delta t} + \beta_{t+\Delta t} S_{t+\Delta t} - \alpha_t B_t - \beta_t S_t \\ &= \alpha_t B_{t+\Delta t} + \beta_t S_{t+\Delta t} - \alpha_t B_t - \beta_t S_t \\ &= \alpha_t (B_{t+\Delta t} - B_t) + \beta_t (S_{t+\Delta t} - S_t) \end{aligned}$$

となる．ここで，$\Delta t \to 0$ とすると，

$$dV_t = \alpha_t dB_t + \beta_t dS_t \tag{4.2.9}$$

を得る．さらに，B_t は常微分方程式 $B_t' = rB_t$ を満たすから，$B_t' = dB_t/dt$ に注意すると，$dB_t = rB_t dt$ と記述される．これと (4.2.4) より，(4.2.9) は

$$dV_t = r\alpha_t B_t dt + \beta_t S_t (rdt + \sigma dW_t) \tag{4.2.10}$$

と記述される．

問 4.9 Self-financing ポートフォリオ $\{(\alpha_t,\beta_t)\}$ の割引現在価値 $\widetilde{V}_t := B_t^{-1} V_t$ は，$d\widetilde{V}_t = \beta_t d\widetilde{S}_t$ を満たすことを証明せよ．

次に，権利行使価格 $K>0$ のコールオプションの複製ポートフォリオについて議論したい．そこで，時刻 t におけるオプション価格 $C(t,S_t)$ が以下の偏微分方程式を満たすことを示そう．ただし，$C(t,x)$ は十分滑らかであるとする．

[19)] より正確には，$\{\mathcal{F}_t\}$-適合確率過程である．

定理 4.7 (Black-Scholes 偏微分方程式) 任意の $t \in [0,T]$ に対して，

$$\frac{\partial C}{\partial t}(t,S_t) + rS_t\frac{\partial C}{\partial x}(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t,S_t) - rC(t,S_t) = 0 \qquad (4.2.11)$$

が成立する．これはオプション価格 $C(t,S_t)$ に関する 2 階の偏微分方程式であり，**Black-Scholes 偏微分方程式** (Black-Scholes partial differential equation) という．以下，これを BS-PDE と略記する．

証明. 時刻 0 でコールオプションを 1 単位購入し，各時刻 $t \in [0,T]$ で危険資産を $-\dfrac{\partial C}{\partial x}(t,S_t)$ 単位保有する self-financing ポートフォリオを考える．このポートフォリオの時刻 t における安全資産の保有量を α_t とすると，ポートフォリオの価値 V_t は

$$V_t = C(t,S_t) - \frac{\partial C}{\partial x}(t,S_t)S_t + \alpha_t B_t \qquad (4.2.12)$$

となる．これは self-financing なので，(4.2.9) より

$$dV_t = dC(t,S_t) - \frac{\partial C}{\partial x}(t,S_t)dS_t + \alpha_t dB_t$$

が成立する．ここで，(4.2.4)，(4.2.7) 及び (4.2.12) より

$$\begin{aligned} dV_t &= \left\{\frac{\partial C}{\partial t}(t,S_t) + rS_t\frac{\partial C}{\partial x}(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t,S_t)\right\}dt \\ &\quad + \sigma S_t\frac{\partial C}{\partial x}(t,S_t)dW_t - S_t\frac{\partial C}{\partial x}(t,S_t)(rdt + \sigma dW_t) + \alpha_t rB_t dt \\ &= \left\{\frac{\partial C}{\partial t}(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t,S_t)\right\}dt \\ &\quad + r\left\{V_t - C(t,S_t) + S_t\frac{\partial C}{\partial x}(t,S_t)\right\}dt \end{aligned} \qquad (4.2.13)$$

が成立する．確率積分項，つまり，dW_t を含む項が消えており，時刻 t における瞬間的な収益は，V_t 円分の安全資産から得られる収益と一致する[20]．よって，$dV_t = \dfrac{V_t}{B_t}dB_t = rV_t dt$ が成立しており，(4.2.13) より

$$\frac{\partial C}{\partial t}(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t,S_t) + r\left\{-C(t,S_t) + S_t\frac{\partial C}{\partial x}(t,S_t)\right\} = 0$$

を得る．以上より，(4.2.11) が成り立つ． □

BS 公式の歴史 Black と Scholes が BS 公式に関する論文[21] を発表したのは，ちょうど半世紀前の 1973 年のことである．彼らは，この小節と同じ

[20] さもなければ裁定機会が生じる．

[21] F. Black & M. Scholes, The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy, 81(3), 637-654 (1973).

ようなアプローチで BS-PDE(4.2.11) を導出し，それに終端条件 $C(T,S_T)=(S_T-K)^+$ を付けた問題を解くことで BS 公式を導いた．また，同じ 1973 年に Merton も BS 公式の導出に成功している[22) 23)]が，彼も Black と Scholes の手法に近い議論で BS 公式を導出している[24)]． □

定理 4.7 の証明では，やや特殊な戦略を設定し，無裁定条件からオプション価格 $C(t,S_t)$ が満たす BS-PDE(4.2.11) を導出した．一方，4.1.3 節では (4.1.9) を仮定し，BS 公式 (4.1.10) を導いた．そこでこの小節の最後に，BS-PDE(4.2.11) から (4.1.9) が得られることを示す[25)]．これによって，無裁定条件のみから BS 公式が得られたことになる．

まず，$\widetilde{C}(t,S_t):=B_t^{-1}C(t,S_t)=e^{-rt}C(t,S_t)$ とおく．このとき，(4.2.11), (4.2.7) 及び

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \widetilde{C}}{\partial t}(t,S_t)=-rB_t^{-1}C(t,S_t)+B_t^{-1}\dfrac{\partial C}{\partial t}(t,S_t), \\ \dfrac{\partial \widetilde{C}}{\partial x}(t,S_t)=B_t^{-1}\dfrac{\partial C}{\partial x}(t,S_t), \quad \dfrac{\partial^2 \widetilde{C}}{\partial x^2}(t,S_t)=B_t^{-1}\dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t,S_t) \end{cases}$$

より

$$d\widetilde{C}(t,S_t)=\sigma S_t B_t^{-1}\frac{\partial C}{\partial x}(t,S_t)dW_t$$

が成立する．これを t から T まで積分すると，

$$\widetilde{C}(T,S_T)-\widetilde{C}(t,S_t)=\int_t^T \sigma S_u B_u^{-1}\frac{\partial C}{\partial x}(u,S_u)dW_u$$

となる．なお，確率積分項の期待値は 0 になることが知られているので，条件付き期待値を取ると，

$$\widetilde{C}(t,S_t)=\mathbf{E_Q}[\widetilde{C}(T,S_T)|S_t]=B_T^{-1}\mathbf{E_Q}[(S_T-K)^+|S_t]$$

が成立する．B_t^{-1} を右辺に移せば，(4.1.9) が得られる．

4.2.3 デルタヘッジ

この小節では，権利行使価格 $K>0$ のコールオプションの複製ポートフォリオを求める．複製ポートフォリオを $\{(\alpha_t,\beta_t)\}$，その価値過程を $\{V_t\}$ と記述すると，(4.2.8) より，$\alpha_t B_t=V_t-\beta_t S_t$ となる．従って，(4.2.10) より

$$dV_t=rV_t dt+\beta_t S_t\sigma dW_t \tag{4.2.14}$$

[22)] R.C. Merton, Theory of rational option pricing. The Bell Journal of Economics and Management Science, 4(1), 141-183 (1973).

[23)] Merton の功績も考慮し，BS モデルや BS 公式を Black-Scholes-Merton モデルなどと呼んでいる文献もある．

[24)] より詳しくは [7, 関根] を参照のこと．

[25)] これとは逆に，BS 公式 (4.1.10) が BS-PDE(4.2.11) を満たしていることも確認できる．これは章末問題に残しておく．

が成立する．一方，$\{V_t\}$ は複製ポートフォリオの価値を表しているから，$V_t = C(t, S_t)$ が成立しているはずであり，(4.2.7) と BS-PDE(4.2.11) から

$$\begin{aligned} dV_t &= dC(t, S_t) \\ &= \left\{ \frac{\partial C}{\partial t}(t, S_t) + rS_t \frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t, S_t) \right\} dt \\ &\quad + \sigma S_t \frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t) dW_t \\ &= rC(t, S_t)dt + \sigma S_t \frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t) dW_t = rV_t dt + \sigma S_t \frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t) dW_t \end{aligned}$$

が得られる．この式と (4.2.14) を比較すれば，複製ポートフォリオ $\{(\alpha_t, \beta_t)\}$ は

$$\alpha_t = e^{-rt}(C(t, S_t) - \beta_t S_t), \quad \beta_t = \frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t)$$

と与えられる．この複製ポートフォリオを**デルタヘッジ** (delta hedge) と呼ぶ．BS 公式 (4.1.10) を用いて $\dfrac{\partial C}{\partial x}(t, S_t)$ を計算すると，$F_N(d_+)$ と等しくなることが分かる．また，デルタヘッジの初期費用は時刻 0 におけるオプション価格 $C(0, S_0)$ と一致している．

問 4.10 $\dfrac{\partial C}{\partial x}(t, S_t) = F_N(d_+)$ が成立していることを確認せよ．

ここでデルタヘッジについて簡単な解釈を与えておこう．t が満期に近いとき，$C(t, S_t)$ を S_t の関数と見なすと，$(S_t - K)^+$ に近いものであることが予想される．つまり，$C(t, S_t)$ の値は，$S_t > K$ であるとき，つまり ITM[26] であるときは $S_t - K$ に近く，$S_t < K$ であるとき，つまり OTM には 0 に近くなるであろう．従って，$\dfrac{\partial C}{\partial x}(t, S_t)$ の値に関しては，$S_t > K$ ならば 1 に近く，$S_t < K$ ならば 0 に近くなるであろう．

問 4.11 この事実について，$\tau = T - t$ は 0 に近いものとして，$F_N(d_+)$ の値を近似計算して確認せよ．

非常に雑に言えば，資産価格が行使価格を上回っているときは，オプションが行使される可能性が高いので，売り手は 1 単位の危険資産を保有しておくべきであり．下回っているときは，オプションは行使されない可能性が高いので，売り手は危険資産を保有しておかなくても良い．

グリークス オプション取引におけるリスク分析のため，$C(t, S_t)$ の偏導関数が用いられることが多々あり，ギリシャ文字による名前を付けて呼んでいる．例えば，危険資産価格 S_t の変動に対するオプション価格 $C(t, S_t)$ の感応度は，偏導関数 $\dfrac{\partial C}{\partial x}(t, S_t)$ によって与えられ，**デルタ** (delta) と呼ばれる．

[26] 1.2.2 節を参照.

これは上記の複製ポートフォリオにおける危険資産の保有量である．上記の複製ポートフォリオがデルタヘッジと呼ばれるのはこのためである．さらに，デルタの変動に対するオプション価格の感応度は，2 次偏導関数 $\dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t, S_t)$ で与えられ，**ガンマ** (gamma) と呼ばれる．また，$C(t, S_t)$ はボラティリティ σ の関数とも見なせるので，ボラティリティの変化に対する感応度 $\dfrac{\partial C}{\partial \sigma}(t, S_t)$ がリスク分析に用いられることもある[27] これを**ベガ** (Vega)[28] と呼ぶ．なお，このような偏導関数を総称して**グリークス** (Greeks) と呼ぶ． □

4.2.4 ボラティリティ

BS モデルの下でオプションの価格計算を行う際，過去の資産価格データや現時点における市場データを用いて推定または調整しなければならないパラメータは，ボラティリティ σ だけである[29]．この小節の前半では，ボラティリティの推定方法について簡単に紹介する．

まず，過去の危険資産価格データを用いた方法を 2 つ紹介する[30]．一つ目は，$N+1$ 個の時系列データ $S_0, \ldots, S_N$ に対して，

$$R_k := \log S_k - \log S_{k-1}, \quad k = 1, \ldots, N,$$

とし，さらに，$\{R_k\}$ の標本平均を $\overline{R}$ とする．つまり，

$$\overline{R} := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} R_k$$

と定義する．このとき，ボラティリティの推定値 σ_{HV} を

$$\sigma_{HV} := \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N} (R_k - \overline{R})^2}$$

と定義し，これを**ヒストリカルボラティリティ** (historical volatility, HV) と呼ぶ．これは $\{R_k\}$ の不偏標本分散の平方根である．なお，ヒストリカルボラティリティを計算する際は，時系列データとして日次データを用いることが多い[31]．

問 4.12 σ_{HV} の定義式において，$N-1$ とある部分を N に変えたらどうなるのか考察せよ．

---

[27] より正確には次の小節で紹介するインプライドボラティリティの変動に対する感応度である．
[28] これはギリシャ文字ではなく，星の名前であろう．
[29] ドリフト係数 μ の値を推定する必要はない．
[30] ここでは数理統計学に関する用語がいくつか登場する．
[31] 日次データを用いる場合，σ_{HV} は日次ボラティリティの推定値であることに注意せよ．

さらに，

$$\sigma_{RV} := \sqrt{\sum_{k=1}^{N} R_k^2}$$

により定義される推定値を，**リアライズドボラティリティ**(realized volatility, RV)[32)]と呼ぶ．ここでは，基本的に日中に観測される**高頻度データ** (high-frequency data) を用いる[33)]．つまり，5 分や 10 分毎に観測されるデータ 1 日分を用いて推定する[34)]．なお，リアライズドボラティリティでは，$N \to \infty$ とすれば真のボラティリティの値に確率収束する．しかし，観測頻度を上げると，**マイクロストラクチャーノイズ** (microstructure noise) と呼ばれる観測ノイズが発生し，真のボラティリティから遠ざかることが知られている．

次に，推定を行う時点におけるオプション価格を用いた方法について述べよう．現時点を t とし，満期 $T(>t)$，行使価格 K のコールオプションを考える．このオプションは実際に取引されてるものとすれば，時刻 t における価格は観測可能である．これを $p(T,K)$ としよう．一方，BS 公式を用いてオプションの理論価格を計算することができる．この理論価格を t, S_t 及び σ, T, K の関数と見なし，$C(t,S_t;\sigma,T,K)$ と記述する．このとき，σ が真に正しい値であれば

$$C(t,S_t;\sigma,T,K) = p(T,K)$$

が成立しているはずである．そこで，この等式を満たす σ を σ_{IV} とし，**インプライドボラティリティ**(implied volatility) と呼び，IV と省略して記述する．なお，ベガ $\dfrac{\partial C}{\partial \sigma}(t,S_t)$ は正であることが知られているので，IV は一意的に定まる．オプション価格には将来の危険資産価格変動に対する予測が織り込まれていると考えば，IV は未来のデータを用いた推定方法と言えよう．ただし，IV 自体には統計学的意味はない．

同じ危険資産を原資産とするオプションは同時に多数取引されているので，違う T や K に対する IV を計算することも可能である．つまり，σ_{IV} は T と K の関数になっている．しかし，もし BS モデルが真に正しいモデルであれば，σ_{IV} の値は T や K を変えても変わらないはずである．ところが，一般的に σ_{IV} は定数にはなっていない[35)]．一般に，T を固定し K を動かして σ_{IV} の値を計算すると，図 4.2 左のグラフのように，ATM 付近[36)]で σ_{IV} の値は最小になり，K が S_t から乖離すればするほど σ_{IV} の値は大きくなる．この現象を，曲線の形状から**ボラティリティスマイル** (volatility smile) と呼ぶ．ま

[32)] 実現ボラティリティと和訳されることもある．
[33)] 高頻度データとは，金融市場における 1 日分のデータで，5 分毎などある決まった比較的短い時間間隔で観測したデータや，全ての取引を記録したデータなどのことを指す．高頻度データの分析は，計量ファイナンス分野で非常に注目されている．
[34)] この場合，σ_{RV} も日次ボラティリティの推定値である．
[35)] この事実を持って，BS モデルは正しいモデルではないとする主張もある．実際のところ，市場関係者で BS モデルが正しいモデルと信じている人はいないだろう．一方，BS モデルほど構造が単純で数学的に取り扱いがし易いモデルもない．
[36)] つまり，K が現時点での危険資産価格 S_t に近いとき

た，場合によってはスマイルカーブが歪み，図 4.2 右のグラフのようにやや右下がりになることがある．これを**ボラティリティスキュー** (volatility skew) と呼ぶ．さらに，T も動かして IV の値を 3 次元的にプロットしたものを**ボラティリティサーフェス** (volatility surface) という．

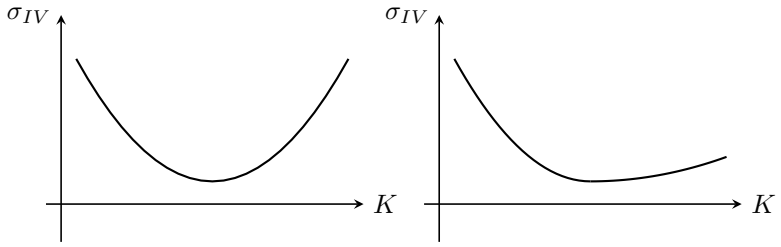


図 4.2: ボラティリティのスマイル (左) とスキュー (右)

意外に思うかもしれないが，1980 年代まではこのようなスマイルやスキューは見られず，IV の値はフラットであった．つまり，BS モデルは割と正しいモデルであったと言えよう．ところが，1987 年 10 月 19 日に起こった株価の大暴落，通称ブラックマンデー以降，スマイル現象が見られるようになったと言われている[37)]

ファットテイル ボラティリティスマイル以外にも BS モデルとは整合しない現象がある．例えば，BS モデルでは危険資産価格の対数は正規分布に従うことが仮定されている．ところが対数価格の尖度を計算すると，分布の裾が正規分布よりも重くなることが知られており，これを**ファットテイル** (fat tail) などという．ただ，ファットテイル自体がスマイルの原因との見方もあり，両者は表裏一体ともいえる． □

以上のように BS モデルは正しいモデルとは言い難いので，BS モデルを発展させたモデルを考えることが多い．例えば，ボラティリティを一定とせず，何かしらの確率過程 $\{\sigma_t\}$ で記述されるモデルを考えることがある．このようなモデルを**確率ボラティリティモデル** (stochastic volatility model, SV model) と呼ぶ．もちろん，一口に SV モデルと言っても，ボラティリティ過程 $\{\sigma_t\}$ の与え方には様々なものがあり，多種多様な SV モデルが存在する．ここで，ある SV モデルに対して，オプションの理論価格を計算することができる場合に，BS モデルのオプション価格 $C(t, S_t; \sigma, T, K)$ との等式

$$C(t, S_t; \sigma, T, K) = \text{SV モデルの理論価格}$$

が成り立つような σ を，SV モデルに対する IV と解釈する．SV モデルに対する IV から生成されるスマイルやサーフェスが，オプション価格データを

[37)] 保有している資産が暴落するリスクに備えるために OTM プットオプションの需要が高まったことなどが，原因として考えられる．

用いた BS モデルに対するスマイルやサーフェスと一致するのであれば，この SV モデルはスマイル現象を説明できるモデルであると言えよう[38)]．

4.2.5　アメリカ型オプション

この小節では BS モデルにおけるアメリカ型オプションの価格付けについて議論する．多期間 2 項モデルの場合と同様に，アメリカ型コールオプションの価格はヨーロッパ型と一致することが知られているので[39)]，ここではアメリカ型プットオプションを考察の対象とする．ヨーロッパ型オプションの価格については，BS 公式という明示的な数学的表現があり，ボラティリティさえ推定できれば容易に数値計算を実行することができる．一方，アメリカ型プットオプションに関しては，そのような価格公式は存在せず，近似的な計算しかできない．

アメリカ型オプションの買い手は，危険資産価格を観測しながら最適な権利行使のタイミングを計っている．例えば，買い手が「t から満期 T までの間で，危険資産価格が最小になる時刻で行使する」という戦略を取ったとしよう．そのような時刻は，

$$\tau = \sup\left\{ s \in [t,T] \middle| S_s = \min_{u\in[t,T]} S_u \right\} \tag{4.2.15}$$

によって定義される $[t,T]$-値確率変数 τ で与えられる[40)]．しかし，危険資産価格が最小になる時刻は満期まで観測しないと分からない．買い手は瞬間瞬間に行使するか判断しなければならず，このような戦略を取ることはできない．一方,「危険資産価格があらかじめ定めたある水準 $x > 0$ を初めて下回ったときに行使する」という戦略を取ると，行使時刻は

$$\tau = \inf\{s \geq t | S_s \leq x\} \wedge T \tag{4.2.16}$$

と記述される[41)]．危険資産価格を観測していれば，τ が発生した時刻がその瞬間に分かるため，買い手がこの戦略を取ることは可能である．

以上まとめると，任意の時刻 $s \in [t,T]$ において，s まで危険資産価格を観測すれば，$[t,T]$-値確率変数 τ が s 以前に発生したかどうか判断できる場合，τ は行使時刻になり得るが，そうでない場合は行使時刻として選択できない．これを数学的に記述すると，τ が行使時刻になり得る場合は，任意の $s \in [t,T]$ に対して，

$$\{\tau \leq s\} \in \mathcal{F}_s \tag{4.2.17}$$

[38)] SV モデル以外のスマイル現象を説明できるモデルとして**局所ボラティリティモデル** (local volatility model) がある．

[39)] この事実を証明することは難しいため，ここでは割愛する．

[40)] より正確には，τ は最小になる時間の最終時刻である．

[41)] 危険資産価格が x を下回らない場合に $\tau = T$ となるように「$\wedge T$」を付け加えてある．因みに，$a \wedge b = \min\{a,b\}$ である．

が成立している．実際，(4.2.15) で定義された τ は条件 (4.2.17) を満たさないが，(4.2.16) の τ は満たす．なお，条件 (4.2.17) を満たす確率変数 τ を ($[t,T]$-値) **停止時刻** (stopping time) という．従って，アメリカ型プットオプションの価格付けは停止時刻の最適化問題として定式化できる．つまり，行使価格 K のアメリカ型プットオプションの時刻 t における価格 $P^A(t,S_t)$ は，t から T までの最適停止問題であり，$[t,T]$-値停止時刻の全体を $\mathcal{T}_{t,T}$ とすれば，

$$P^A(t,S_t) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E_Q}\left[e^{-r(\tau-t)}(K-S_\tau)^+|S_t\right]$$

と書けるのである．ここで，

$$\sup_{\tau\in\mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E_Q}\left[e^{-r(T-t)}(K-S_T)^+|S_t\right] = \mathbf{E_Q}\left[e^{-r(\tau^*-t)}(K-S^*_\tau)^+|S_t\right]$$

を満たす停止時刻 τ^* が存在すれば，それが最適停止時刻となる．実は，最適停止時刻 τ^* は存在することが知られており，

$$\tau^* = \inf\{s\geq t|S_s \leq L(T-s)\}\wedge T$$

で与えられる．ここで，L は $[0,T-t]$ 上に定義された関数で $L(0)=K$ を満たすものである．しかし，関数 L の正確な表現は知られていない．

第 4 章　章末問題

モデルや記号はすべて本文中に与えたものとする．

4-1　(4.1.11) で紹介したプットコールパリティが成立しないとき，これら 2 つのオプションを含む 4 資産の市場において裁定機会が生じることを示せ．

4-2

1. $S_t f_N(d_+) = Ke^{-r\tau} f_N(d_-)$ が成立することを証明せよ．ただし，f_N は標準正規分布の確率密度関数である．
2. BS 公式 (4.1.10) が BS-PDE(4.2.11) を満たしていることを確認せよ．

4-3　確率微分方程式

$$dX_t = -\alpha X_t dt + dW_t, \quad X_>0,$$

を解け．ただし，$\alpha > 0$ とする．

4-4　行使価格 $K>0$ のヨーロピアンプットオプション価格 $P(t,S_t)$ も (4.2.11) を満たしていることを証明せよ．また，プットオプションに対するデルタヘッジを導出せよ．

第5章　最適ポートフォリオとCAPM

この章の前半では，ポートフォリオ理論の標準モデルである平均分散アプローチを紹介する．ここでは多数の危険資産が取引可能である 1 期間金融市場モデルを考え，最適ポートフォリオの導出方法について議論する．後半は，CAPM と呼ばれる個別資産の期待収益率に関する関係式を導出する．CAPM では，前半で紹介する平均分散アプローチを前提とし，多数の投資家がそれぞれの選好に応じて最適ポートフォリオを組むことを仮定する．つまり，前半では個別の投資家の行動に関する議論を行い，後半では多数の投資家の行動の結果として生じる個別資産の価格 (収益率) に関する議論を行う．

5.1　平均分散アプローチ

本節では，ポートフォリオ理論の標準モデルである**平均分散アプローチ** (mean-variance approach) を紹介する．ポートフォリオ理論の目的は最適ポートフォリオを見つけることであるが，そのためには「最適」の意味をはっきりさせる必要がある．

この章を通じて，多数の資産が取引可能な 1 期間モデルを考える[1)]．第 2 章と同様，現在時刻を 0，将来時刻を T とし，ポートフォリオを構築するための資金は所与とする[2)]．ポートフォリオを評価することはその**収益** (return) を評価することであるが，資金に依らない評価を与えるために，投資額 1 円あたりの収益である**収益率** (rate of return) によってポートフォリオを評価する．ここで，ある資産の時刻 t における価格を S_t とすれば，この資産を 1 単位保有するポートフォリオの収益率 R は

$$R := \frac{S_T - S_0}{S_0}$$

と定義される．また，これまで議論してきたオプション価格付け理論では，資産の保有量によってポートフォリオを記述したが，ポートフォリオ理論では

[1)] 市場は完全競争的であると仮定する．しかし，この章では危険資産の空売りを制約する．

[2)] つまり，ポートフォリオが最適となる資金を求める問題ではなく，与えられた資金の中で最適なポートフォリオを見つける問題を議論する．

投資割合で記述する[3]．従って，資金は 1 円と仮定しても一般性を失わない．この仮定の下では，投資割合と実際の投資額は一致するので便利である．

平均分散アプローチでは，ポートフォリオの収益率の期待値である**期待収益率** (expected rate of return) と，収益率の標準偏差のみに基づいてポートフォリオを評価する．従って，図 5.1 左のように，横軸に標準偏差，縦軸に期待収益率を表す座標平面を用意し，ポートフォリオに対応する点をプロットすることで，視覚的にポートフォリオを分析することができる．なお，期待収益率をリターン，標準偏差をリスク と呼ぶこともある．また，投資家は，**同じ期待収益率を持つポートフォリオであれば標準偏差の小さい方を好み，同じ標準偏差を持つポートフォリオであれば期待収益率が大きい方を好むということを仮定する．**よって，図 5.1 右において，点 A や点 C より点 B のポートフォリオを好み，点 D より点 A や点 C を好む．しかし，点 A と点 C の選好は，5.1.3 節で議論する各投資家の**効用** (utility) によって決まる．

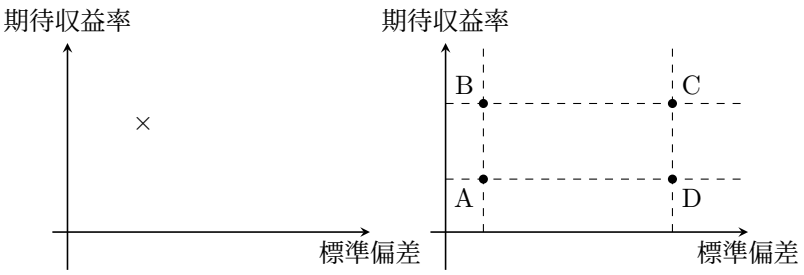


図 5.1: 標準偏差-期待収益率ダイアグラム

A.2.3 節にあるように，正規分布は期待値と標準偏差が与えられればその分布が完全に定まるため，期待値と標準偏差だけを用いてポートフォリオを評価するという平均分散アプローチの仮定に整合的である．実際，正規分布に従う 2 つの確率変数 X_1, X_2 と 2 つの実数 $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ に対して，線形結合 $a_1X_1 + a_2X_2$ も正規分布に従う[4]ことから，すべての危険資産の収益率が正規分布に従うとき，一般にそれらを組み合わせて構築されるポートフォリオの収益率も再び正規分布に従う．よって，以後，**危険資産の収益率はすべて正規分布に従うと仮定して議論を進める．**

[3] 2 資産モデルにおいてポートフォリオが $(0.7, 0.3)$ と記述された場合，保有量による記述では第 1 資産を 0.7 単位，第 2 資産を 0.3 単位保有するポートフォリオということになるが，投資割合による記述だとすると，第 1 資産に資金の 70%を投資し，第 2 資産に 30%投資するポートフォリオということになる．

[4] ただし，例外もあるので注意せよ．

5.1.1 実行可能領域と効率的フロンティア (安全資産がない場合)

まず，2 つの危険資産から成る市場モデルを考える．それぞれの資産の収益率を確率変数 R_0 及び R_1 で表す．空売りはできないものとし，この 2 つの資産を組み合わせてポートフォリオを構築する．第 1 資産への投資割合が $\alpha \in [0,1]$ であるポートフォリオの収益率を R_α とすると，

$$R_\alpha = \alpha R_1 + (1-\alpha) R_0$$

となる．今，R_k，$k = 0, 1$ の期待値と標準偏差をそれぞれ μ_k，σ_k と書くと，R_α の期待値 (つまり，ポートフォリオの期待収益率) は

$$\mathbf{E}[R_\alpha] = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_0 \tag{5.1.1}$$

であり，α の 1 次式で与えられる．一方，ρ を R_1 と R_0 の相関係数として，R_α の分散を計算すると

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[R_\alpha] &= \mathrm{Var}[\alpha R_1 + (1-\alpha)R_0] \\ &= \alpha^2\sigma_1^2 + (1-\alpha)^2\sigma_0^2 + 2\alpha(1-\alpha)\,\mathrm{Cov}(R_1, R_0) \\ &= \alpha^2\sigma_1^2 + (1-\alpha)^2\sigma_0^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_1\sigma_0\rho \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

となる．

問 5.1 (5.1.1) 及び (5.1.2) の計算を確認せよ．

よって，R_α の標準偏差は α の 2 次式の平方根で，ρ の値に依存する．図 5.2 では，R_1 と R_0 に対応する点をダイアグラム上にプロットし，$\rho = -1, -0.5, 0, 0.5, 1$ の 5 つの場合に対して，α の値を 0 から 1 まで動かした際の R_α に対応する点を描いた．まず，一番右端の直線が $\rho = 1$ の場合である．このときは，$\sqrt{\mathrm{Var}[R_\alpha]} = \alpha\sigma_1 + (1-\alpha)\sigma_0$ となり，標準偏差も α の 1 次式になる．以下，右から順に $\rho = 0.5, 0, -0.5, -1$ の場合の曲線となる．なお，$\rho = -1$ のとき，標準偏差は絶対値を取って $|\alpha\sigma_1 - (1-\alpha)\sigma_0|$ となることに注意せよ．ρ の値が 1 や -1 になることは通常あり得ないので，一般的には $|\rho| < 1$ である．このとき，R_α に対応する点は左側に膨らみを持つ曲線を描く．ρ の値が与えられたとき，投資家が選択できるポートフォリオの期待収益率と標準偏差の組み合わせは，図 5.2 で示した曲線上の点のみであるから，この曲線上の点の中から最適ポートフォリオを見つけることになる．なお，この曲線のことを **実行可能領域** (feasible region) という[5)]．

次に，3 つの危険資産 R_k, $k = 0, 1, 2$ から成るモデルに対する実行可能領域を求める．ただし，上記と同様に空売りはできないものとする．まず，R_0

[5)] ここでは実行可能曲線と言った方がしっくりくると思うが，資産の数を増やすと曲線ではなく領域になるので，ここでも領域と呼ぶことにする．

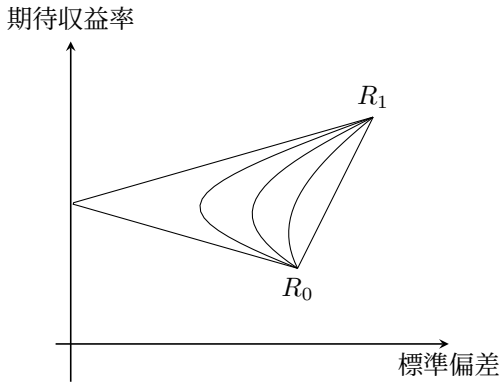


図 5.2: 2 資産市場モデルの実行可能領域

と R_1 のみから成るポートフォリオの実行可能領域を図 5.3 左の実線で示す．図 5.3 左の実線上の黒丸のようにこの曲線上の点を任意に一つ取ると，そのポートフォリオの収益率は $\alpha \in [0,1]$ を用いて $\alpha R_1 + (1-\alpha)R_0$ と記述できる．これを R_α とおく．今度は R_α と R_2 を組み合わせたポートフォリオの実行可能領域を描くと，図 5.3 左の点線が得られる．最後に，α を 0 から 1 まで動かすと，図 5.3 右のように 3 つの曲線で囲まれた領域が得られる．これが 3 資産市場の実行可能領域である．以上まとめると，3 資産の実行可能領域は，曲線ではなく左凸の領域となる．さらに資産の数を増やしても実行可能領域の形状は変わらず，図 5.4 左のような左凸の領域となる[6)]．

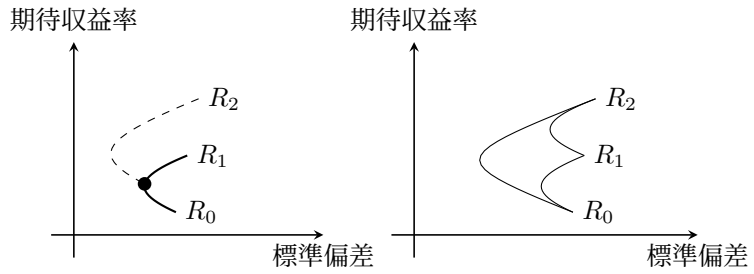


図 5.3: 3 資産市場モデルの実行可能領域

従って，多数の危険資産から成る市場モデルの場合，図 5.4 左で示した領域の中から最適なポートフォリオを探すことになる．ここで，図 5.4 右のように領域内に縦線を一つ引いてみる．この縦線上の点に対応するポートフォリオはすべて同じ標準偏差を持つので，この縦線の中では上端点が最も期待収益率が高くなるため，その点が最適ポートフォリオとなる．つまり，上端点以外は (領域全体の) 最適ポートフォリオの候補から外れる．また，横線を

[6)] [1, 岸本-池田] ではこの領域を「歪んだ傘」と呼んでいる．ここでもこの名称を使う．

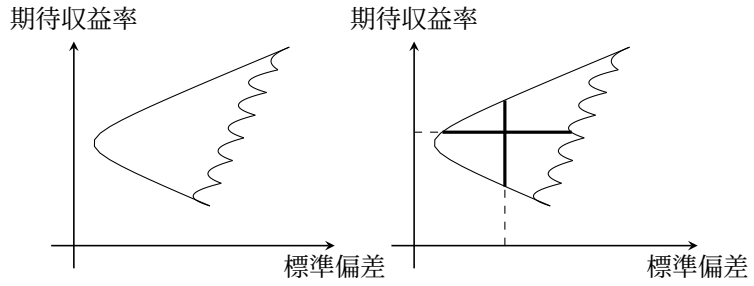


図 5.4: 多資産市場モデルの実行可能領域

引くと，その上の点はすべて同じ期待収益率を持つので，左端点が横線の中では最適なポートフォリオとなり，それ以外の点が最適ポートフォリオになることはない．そこで，図 5.5 左の点 A のように，その点を通る縦線を引けば上端点となり，その点を通る横線を引けば左端点になる点のみが最適ポートフォリオの候補となることが分かる．このような点の全体は，図 5.5 右の太線部分，つまり，実行可能領域の中で標準偏差が最小となる点 B から始まる実行可能領域の左上側の境界になる．この太線部分を**効率的フロンティア** (efficient frontier) という．以上まとめると，最適ポートフォリオを求める際には実行可能領域全体を見る必要はなく，効率的フロンティア上の点だけを考えれば良いことが分かった．そして，効率的フロンティアは左上に凸な曲線になっている．実は，このことが今後の議論で重要な役割を果たす．

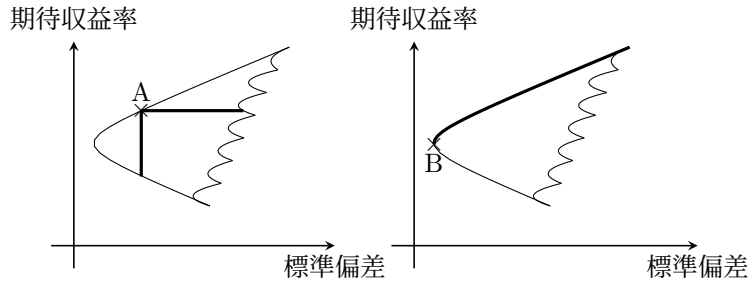


図 5.5: 多資産市場モデルの効率的フロンティア

5.1.2 実行可能領域と効率的フロンティア (安全資産がある場合)

これまでは危険資産だけから成る市場を考えてきたが，ここでは安全資産を含む市場の実行可能領域を導出したい．まず，一つの危険資産と安全資産を組み合わせたポートフォリオの実行可能領域を求めよう．安全資産の収益

率[7]を R_f と記述する．これは非負の実数であるから $\mathrm{Var}(R_f) = 0$ となり，R_f に対応する点はダイアグラムの縦軸上に現れる．ここで，危険資産 R_1 を任意に選ぶ．R_1 と R_f の共分散は 0 であるから，これらを $\alpha : 1-\alpha$ で組み合わせたポートフォリオの収益率を R_α とすると，その期待収益率と標準偏差は，それぞれ $\mathbf{E}[R_\alpha] = \alpha\mathbf{E}[R_1] + (1-\alpha)R_f$ 及び $\sqrt{\mathrm{Var}[R_\alpha]} = \alpha\sqrt{\mathrm{Var}[R_1]}$ となる．つまり，R_α に対応する点は図 5.6 左のように直線を描く．なお，安全資産はいくらでも空売りできると仮定すると，α は 1 より大きな値も取れるので，直線は R_1 の右側にも延長される．

次に，多数の危険資産と一つの安全資産から成るモデルを考える．なお，ここでも危険資産の空売りはできないが，安全資産はいくらでも空売りできるものとする．まず危険資産だけから成るポートフォリオを選び，次にそれと安全資産を組み合わせてポートフォリオを構築する．つまり，「歪んだ傘」から 1 点を選び，その点と点 R_f を結ぶ直線を引く．この直線を「歪んだ傘」上のすべての点に対し描けば，実行可能領域が得られる．それは R_f を通り「歪んだ傘」と接する 2 つの直線に囲まれた三角形の領域，つまり，図 5.6 右の 2 つの直線に囲まれた三角領域である．ただし，安全資産の空売りを許しているので，実行可能領域の右側はどこまでも広がっている．さらに前小節の議論を繰り返せば，効率的フロンティア は上部の太線部分になることが分かる．ここで重要なことは，効率的フロンティア上のポートフォリオが，効率的フロンティアと「歪んだ傘」との接点 T と，安全資産の組み合わせで得られるということである．つまり，**最適ポートフォリオに含まれる各危険資産の比率は投資家の選好に依らない．**なお，接点 T に対応するポートフォリオを**接点ポートフォリオ** (tangency portfolio) という．以上より，最適ポートフォリオ問題は，**まず接点ポートフォリオを導出し，その後に接点ポートフォリオと安全資産の最適な比率を求める．**このようなプロセスを**分離定理** (separation theorem) という[8]．

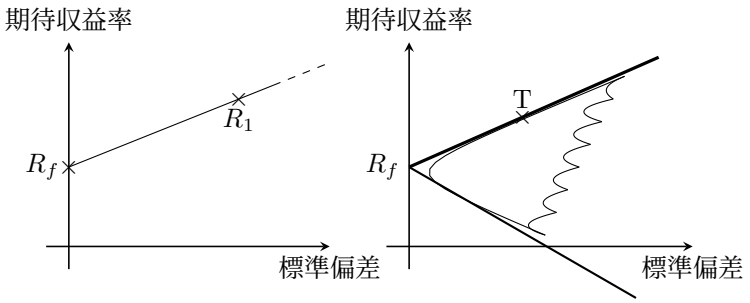


図 5.6: 安全資産と危険資産から成るポートフォリオ

[7] 安全資産の収益率は金利に等しい．

[8] Tobin の分離定理と呼ぶこともある．また，ポートフォリオ理論には「2 資産分離定理」と呼ばれるものもあるが，これは別物である．なお，2 資産分離定理については脚注 23) で紹介する．

5.1.3　効用関数と無差別曲線

これまでの議論により，最適ポートフォリオを導出するためには効率的フロンティア上のポートフォリオを比較する必要がある．そのためには，図 5.1 右における点 A と点 C のように，期待収益率と標準偏差の大小関係だけでは選好が決まらないポートフォリオを比較しなければならない．このような場合，個々の投資家の選好に応じて比較する必要がある．この小節ではその方法について議論する．

まず，収益率 x の投資から投資家が得る満足度を $U(x)$ で表すことにする．この関数 U を**効用関数** (utility function) と呼ぶ．効用関数は非減少凹関数であると仮定する．このような効用関数を持つ投資家を**リスク回避的** (risk averse) という．なお，関数 U が非減少とは，$y > x$ ならば $U(y) \geq U(x)$ を満たすときにいう．よって，効用関数が非減少であるという仮定は自然なものであろう．一方，関数 U が**凹** (concave) であるとは，任意の $x, y \in \mathbb{R}$ と任意の $\alpha \in [0, 1]$ に対して

$$U(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha U(x) + (1-\alpha)U(y)$$

を満たすときにいう[9]．非減少凹関数の例としては，$\sqrt{x}$ や $\log x$ がある[10]．U が 2 回微分可能であれば，U が凹関数であることと，$U''(x) \leq 0$ であることは同値である．これは，収益率が $\delta > 0$ だけ増大したときの効用の増分 $U(x+\delta) - U(x)$ が，x について減少していることを意味している．

ここで，収益率が確率変数 R で与えられるポートフォリオの効用は，効用の期待値である $\mathbf{E}[U(R)]$ であるとする．これを**期待効用** (expected utility) という．従って，効用関数 U を持つ投資家にとっての最適ポートフォリオとは，期待効用が最大となるポートフォリオである．なお，図 5.1 右の 4 点 A，B，C，D に対応するポートフォリオを，それぞれ R_A, R_B, R_C, R_D と書くとき，すべての非減少凹関数 U に対して，$\mathbf{E}[U(R_A)] \leq \mathbf{E}[U(R_B)], \mathbf{E}[U(R_C)] \leq \mathbf{E}[U(R_B)]$ かつ $\mathbf{E}[U(R_D)] \leq \mathbf{E}[U(R_A)], \mathbf{E}[U(R_D)] \leq \mathbf{E}[U(R_C)]$ が成立する．

問 5.2 R_A, R_B, R_C, R_D がすべて正規分布に従うとき，上記の不等式が成立することを示せ[11]．

今，ダイアグラム上に点 A を任意に取り，点 A と期待効用の値が等しくなる点をプロットすると，図 5.7 左のように下に凸な右上がりのグラフが得られる．この曲線を**無差別曲線** (indifference curve) という．また，期待効用の値を固定する毎に無差別曲線が引けるため，ダイアグラム上には無数の無差別曲線が存在する．さらに，無数にある無差別曲線は決して交わることはなく，また，ダイアグラム上の任意の点に対し，その点を通る無差別曲線が唯

[9] 定理 3.5 で紹介した凸関数の定義と比較せよ．
[10] ただし，これらの関数は定義域が非負実数に限定されている．
[11] この問はやや難しい．

一つ存在する．無差別曲線は地図上の等高線のようなものであり，2 つの無差別曲線のうち左上側にある方が，対応する期待効用の値は大きくなる[12)]．

問 5.3 無差別曲線が上記の性質を満たしていることを確認せよ．

それでは，無差別曲線が下に凸で右上がりになることを示そう．まず，ポートフォリオ R_0 に対応する点をダイアグラム上に取る．この点と同じ期待効用を持つ点は R_0 の右上か左下に存在する．そのような点として R_1 を取る．

問 5.4 R_1 の位置が R_0 の右上か左下になる理由を述べよ．

2 つのポートフォリオ R_1 と R_0 を $\alpha : 1-\alpha$ で組み合わせたポートフォリオを R_α とする．ただし，$\alpha \in [0,1]$ である．R_α に対応する点は，R_1 と R_0 を結んだ線分より左に現れる．より正確に言えば，R_1 と R_0 の相関係数 ρ の値が小さい程，R_α は左になる[13)]．ここで，U の凹性を用いると，

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[U(R_\alpha)] &= \mathbf{E}[U(\alpha R_1 + (1-\alpha)R_0)] \geq \alpha \mathbf{E}[U(R_1)] + (1-\alpha)\mathbf{E}[U(R_0)] \\ &= \mathbf{E}[U(R_0)]\end{aligned}$$

が成立する．この不等式は ρ の値に依らず成立するので，R_1 と R_0 を結んだ線分上の点は R_1 及び R_0 より大きな期待効用を持つ[14)]．つまり，線分上の点を一つ選び，その点と同じ標準偏差を持ち，かつ，R_1 及び R_0 と同じ期待効用を持つ点は線分の下 (図 5.7 右の点 B) に存在する．この議論はダイアグラム上のすべての点に対して成立するので，無差別曲線は下に凸かつ右上がりとなる．

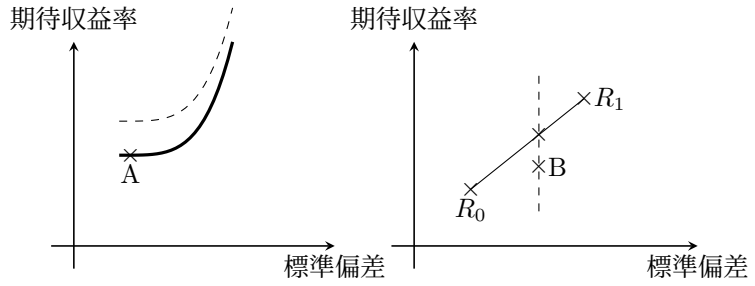


図 5.7: 無差別曲線とその凸性

[12)] 図 5.7 左には実線と点線で描かれた 2 つの無差別曲線があるが，点線の方が期待効用の値は大きい．
[13)] 図 5.2 を参照せよ．
[14)] $\rho = 1$ のとき，R_α は線分上に現れる．

5.1.4　最適ポートフォリオ

この小節では，最適ポートフォリオの導出方法とその特性について述べる．まず，1 つの安全資産と多数の危険資産から成る市場を考える．図 5.8 左では，効率的フロンティア (R_f から出発し接点ポートフォリオ T を通る半直線) に，3 本の無差別曲線 A,B,C を重ね合わせた[15)]．中でも，曲線 B は接点 S で効率的フロンティアに接している．実はこの接点 S が最適ポートフォリオを与える．何故ならば，無差別曲線は下に凸で右上がりであることを考慮すれば，点 S 以外の効率的フロンティア上の点の期待効用は，曲線 B よりも低いことが分かる[16)]．なお，効率的フロンティアに接する無差別曲線は，存在するとすれば唯一つである．以上より，**最適ポートフォリオは効率的フロンティアと無差別曲線の接点で与えられる**ことが分かった．これは安全資産を含まない場合でも，効率的フロンティアが左上に凸な曲線になることから，同様の結果が成り立つ．

問 5.5 図 5.8 左において，曲線 B 以外の無差別曲線は，効率的フロンティアとの接点を持たないことを示せ．

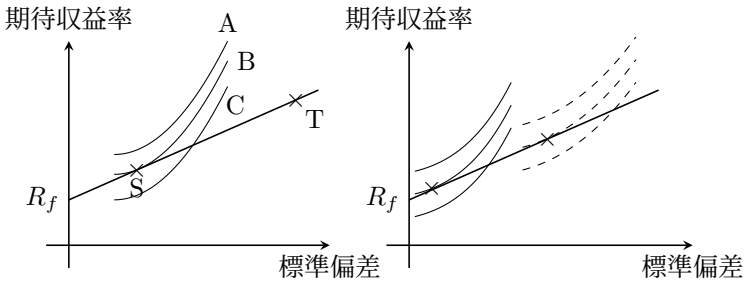


図 5.8: 最適ポートフォリオの導出

安全資産を含む市場では，最適ポートフォリオは安全資産と接点ポートフォリオとの組み合わせであるが，最適ポートフォリオを実現する点が R_f に近づく程，安全資産の割合は大きくなる．つまり，投資家のリスク回避度は高くなる．この点を無差別曲線の傾きを用いて説明しよう．図 5.8 右では，傾きが緩やかな無差別曲線 (点線) と急な無差別曲線 (実線) を描いた．実は，投資家のリスク回避度が大きいときは，無差別曲線の傾きが急になる．何故ならば，ダイアグラム上のある点に対して，この点よりも標準偏差が少し大きいポートフォリオで，同じ期待効用を持つものを得るためには，期待収益率

[15)] 対応する期待効用の値は，A,B,C の順で高くなる．また，簡単のため，無差別曲線は滑らかで直線部分を持たないものとする．

[16)] より正確には，点 S を除いた曲線 B 上の点は効率的フロンティアの上側に位置する．従って，曲線 A は効率的フロンティアとの共有点を持たない．また，曲線 C は効率的フロンティアとの共有点を 1 つまたは 2 つ持つ．

を大幅に増加させる必要がある．つまり，無差別曲線の傾きが急である場合は，標準偏差の増加に敏感であると言え，投資家のリスク回避度が大きいことを意味している．

なお，最適ポートフォリオが実現される点では，無差別曲線の傾きが効率的フロンティアの傾きに等しくなる．効率的フロンティアは直線なので，どこでも傾きが同じであることに注意しよう．図 5.8 右の実線の無差別曲線のように傾きが急である場合，効率的フロンティアの傾きと等しくなる点は縦軸に近い所で実現される．つまり，最適ポートフォリオに含まれる安全資産の割合は大きく，投資家のリスク回避度が高いことが分かる．以上より，最適ポートフォリオの位置と無差別曲線の傾きは整合的であることが分かった．

5.2 CAPM

この節では，個別の危険資産の期待収益率が満たす関係式である**資本資産評価モデル** (capital asset pricing model, CAPM)[17)]を導出する．ここでは多数の投資家が参加している 1 期間金融市場モデルに対して，多数の危険資産と 1 つの安全資産が取引可能であり，平均分散アプローチの仮定がすべて成り立っているものとする．つまり，すべての投資家はリスク回避的であり，ポートフォリオを評価する際にはその収益率の期待値と標準偏差のみを用いることを仮定する．さらに，危険資産の収益率について，すべての投資家は同一の予測を持っているものとする．つまり，すべての投資家は同じ「歪んだ傘」の下で最適ポートフォリオを組むものとする．

5.2.1 市場ポートフォリオ

前節で議論したように，平均分散アプローチにおける各投資家の最適ポートフォリオは，接点ポートフォリオと安全資産の組み合わせにより実現される．ただし，その組み合わせ比率は各投資家が持つ効用関数に依存して決まる．CAPM の仮定の下では，すべての投資家は同一の「歪んだ傘」の下でポートフォリオを最適化している．このとき，以下の命題が成立する:

命題 5.1 接点ポートフォリオは各危険資産の**時価総額** (market capitalization)[18)]の比率と一致する．

証明. 市場で取引されている危険資産の個数を N とし，第 k 資産の収益率を確率変数 R_k で表す．このとき，接点ポートフォリオの収益率 R_T は，

$$R_T = \sum_{k=1}^{N} a_k R_k$$

[17)] キャップエムと発音する．
[18)] 時価総額とは，株価 × 発行済み株式数である．

と記述される．ただし，各 a_k は非負で，$\sum_{k=1}^{N} a_k = 1$ を満たす．また，市場で取引を行っている投資家は全部で M 人おり，i 番目の投資家の最適ポートフォリオに含まれる安全資産の割合を α_i とする．なお，安全資産はいくらでも空売り可能であるから，α_i が取り得る値の範囲は $(-\infty, 1]$ となる．これより，i 番目の投資家の最適ポートフォリオの収益率は $\alpha_i R_f + (1-\alpha_i)R_T$ となる．ただし，R_f は安全資産の収益率，つまり，市場の金利である．ここで，i 番目の投資家の初期時点における資産を W_i とすると，市場全体の時刻 0 における資産総額は $\sum_{i=1}^{M} W_i$ であり，これを C と書く．さらに，市場全体のポートフォリオの収益率 R は

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{C}\sum_{i=1}^{M} W_i \left(\alpha_i R_f + (1-\alpha_i)R_T\right) \\ &= \frac{1}{C}\left(\sum_{i=1}^{M} W_i \alpha_i R_f + \sum_{i=1}^{M} W_i (1-\alpha_i) \sum_{k=1}^{N} a_k R_k\right) \\ &= \alpha R_f + (1-\alpha)\sum_{k=1}^{N} a_k R_k \end{aligned}$$

となる．ただし，$\alpha := \dfrac{1}{C}\sum_{i=1}^{M} W_i \alpha_i$ であり，これは 1 以下の値を取る．従って，市場全体のポートフォリオにおける各危険資産への投資割合は，接点ポートフォリオと等しい．また，市場の総資産が C であることから，第 k 資産の時刻 0 における時価総額は $C(1-\alpha)a_k$ である．以上より，接点ポートフォリオと各危険資産の時価総額の比率は等しい[19)]．□

以上を踏まえ，以後，接点ポートフォリオを**市場ポートフォリオ** (market portfolio) と呼ぶ[20)]．

5.2.2 CAPM の導出

個別資産の期待収益率が満たす関係式である CAPM を導出しよう．市場ポートフォリオの収益率を改めて R_M とする．よって，資産の個数を N とすれば，$R_M = \sum_{k=1}^{N} a_k R_k$ と記述できる．ここで第 k 資産の収益率 R_k と R_M を $b : 1-b$ で組み合わせたポートフォリオの収益率を $\widehat{R}_b$ とすると，

$$\widehat{R}_b := bR_k + (1-b)R_M$$

[19)] これより，各 a_k は正であることが分かる．さもなければ時価総額が 0 となってしまうからである．

[20)] 市場ポートフォリオを経済学的に理解するには**均衡** (equilibrium) の概念が必要となるが，ここでは均衡理論に関する議論は行わない．

となる．ただし，b は $-\dfrac{1}{1-a_k}$ から 1 までの値を取ることができる．今，b を動かし対応する点をダイアグラム上にプロットすると，図 5.9 の太線で描かれた曲線 C が得られる．曲線 C は「歪んだ傘」に含まれ，$b=0$ のとき R_M と一致する．つまり，$\widehat{R}_0 = R_M$ である．なお，安全資産 R_f と R_M を結ぶ直線，これを**資本市場線** (capital market line, CML) という，と「歪んだ傘」との接点が R_M であるから，曲線 C も R_M で CML に接している[21)]．そこで，曲線 C の R_M における傾きを計算しよう．

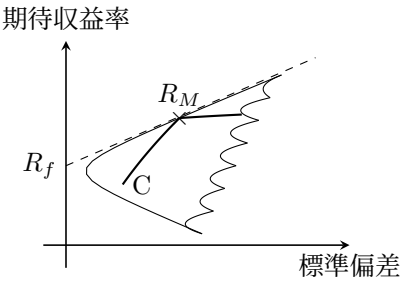


図 5.9: CAPM の導出

まず，R_k 及び R_M の期待収益率をそれぞれ μ_k，μ_M，標準偏差をそれぞれ σ_k，σ_M とする．さらに，$\widehat{R}_b$ の期待収益率を $\widehat{\mu}_b$，標準偏差を $\widehat{\sigma}_b$ とすると，

$$\begin{cases} \widehat{\mu}_b = b\mu_k + (1-b)\mu_M, \\ \widehat{\sigma}_b^2 = b^2\sigma_k^2 + (1-b)^2\sigma_M^2 + 2b(1-b)\sigma_k\sigma_M\rho_{kM} \end{cases}$$

となる．ただし，ρ_{kM} は R_k と R_M の相関係数である．ここで，曲線 C の $\widehat{R}_b$ における傾き Δ_b を求めると，

$$\begin{aligned} \Delta_b &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\widehat{\mu}_{b+\varepsilon} - \widehat{\mu}_b}{\sigma_{b+\varepsilon} - \widehat{\sigma}_b} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(\widehat{\mu}_{b+\varepsilon} - \widehat{\mu}_b)(\widehat{\sigma}_{b+\varepsilon} + \widehat{\sigma}_b)}{\widehat{\sigma}_{b+\varepsilon}^2 - \widehat{\sigma}_b^2} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(\mu_k - \mu_M)(\widehat{\sigma}_{b+\varepsilon} + \widehat{\sigma}_b)}{(2b+\varepsilon)\sigma_k^2 - (2(1-b)-\varepsilon)\sigma_M^2 + 2(1-2b-\varepsilon)\sigma_k\sigma_M\rho_{kM}} \\ &= \frac{(\mu_k - \mu_M)\widehat{\sigma}_b}{b\sigma_k^2 - (1-b)\sigma_M^2 + (1-2b)\sigma_k\sigma_M\rho_{kM}} \end{aligned}$$

となる．従って，R_M における傾き Δ_0 は，$b=0$ を代入し，$\widehat{\sigma}_0 = \sigma_M$ であることに注意すると，

$$\Delta_0 = \frac{(\mu_k - \mu_M)\sigma_M}{-\sigma_M^2 + \sigma_k\sigma_M\rho_{kM}}$$

となる．一方，CML の傾き Δ_{CML} は

$$\Delta_{CML} = \frac{\mu_M - R_f}{\sigma_M}$$

[21)] 図 5.9 において，曲線 C は R_M において滑らかでないように見えるが，これは滑らかに描いたつもりが技術的理由でこのようになってしまっただけである．

であるから，関係式

$$\frac{\mu_M - R_f}{\sigma_M} = \frac{(\mu_k - \mu_M)\sigma_M}{-\sigma_M^2 + \sigma_k \sigma_M \rho_{kM}}$$

が成立する．ここで，

$$\beta_k := \frac{\mathrm{Cov}(R_k, R_M)}{\mathrm{Var}[R_M]} = \frac{\sigma_k \rho_{kM}}{\sigma_M}$$

と定義する．これを β_k を第 k 資産の**ベータ** (beta) と呼ぶ．この β_k を用いて上式を整理すると，以下の関係式を得る:

定理 5.2 任意の $k = 1, \ldots, N$ に対して，その期待収益率 μ_k は

$$\mu_k = R_f + \beta_k(\mu_M - R_f) \text{ または } \mu_k - R_f = \beta_k(\mu_M - R_f) \qquad (5.2.1)$$

をみたす．

問 5.6 $R_M = \sum_{i=1}^{N} a_k R_k$ と書けるとき，$\sum_{k=1}^{N} a_k \beta_k = 1$ が成り立つことを証明せよ．ただし，各 a_k は正で，$\sum_{k=1}^{N} a_k = 1$ を満たすものとする．

関係式 (5.2.1) を CAPM と呼ぶ．なお，$\mu_k - R_f$ は第 k 資産の安全資産に対する**期待超過収益率** (expected excess return) であり，CAPM(5.2.1) は，個別資産の期待超過収益率が，市場ポートフォリオの期待超過収益率にベータを掛けたものに等しいことを主張している．CAPM に基づいた個別資産の収益率の推定を行う際には，市場ポートフォリオの代替として TOPIX などの株価指数を用いる．一般に，金融機関などのベータ値は高く，製薬会社や電力会社などのベータ値は低いことが知られている．これは，ベータが市場ポートフォリオとの共分散で与えられることから，市場全体の動きに敏感な銘柄のベータ値は高く，不景気の際でも収益率が安定した銘柄のベータ値は低くなるからである．また，市場ポートフォリオの超過収益率に期待が持てる好景気の際には，ベータ値が高い銘柄への投資が有効であり，逆に，不景気の際にはベータ値が低い銘柄への投資が有効であることが CAPM により示唆されている．

ポートフォリオの評価手法 ポートフォリオ (ここでは投資信託などを念頭に置く) の運用実績を評価する手法について紹介する．まず，過去の一定期間における収益率の標本平均を $\overline{R}$，標本不偏標準偏差を $\overline{\sigma}$，短期国債などの安全資産の平均金利を $\overline{R}_f$ とするとき，超過収益率の標本平均を $\overline{\sigma}$ で割った値 $\dfrac{\overline{R} - \overline{R}_f}{\overline{\sigma}}$ を **Sharpe レシオ** (Sharpe ratio) という．また，標準偏差ではなくベータで割った値 $\dfrac{\overline{R} - \overline{R}_f}{\overline{\beta}}$ を **Treynor 測度** (Treynor measure) という．な

お，$\overline{\beta}$ は過去の一定期間におけるポートフォリオの収益率と，市場ポートフォリオの代替変数である株価指数の収益率の標本不偏共分散を，株価指数の標本不偏分散で割ったものである．さらに，CAPM から得られる期待収益率との差 $\overline{R} - \left\{\overline{\beta}(\overline{R}_M - \overline{R}_f) + \overline{R}_f\right\}$ を **Jensen のアルファ**(Jensen's alpha)[22] という．□

5.3 CAPM の発展

この節では CAPM の発展的な話題を 2 つ紹介する．一つは，安全資産が存在せず多数の危険資産だけから成る市場モデルにおける CAPM であり，もう一つは，個別資産の収益率がいくつかのファクターによる線形回帰モデルで記述される場合を考え，各資産の期待収益率を無裁定条件から導出することを試みる．

5.3.1 ゼロベータ CAPM

ここでは安全資産が存在しない場合の CAPM について議論する．5.1.2 節で求めたように，効率的フロンティアは図 5.10 の太線で与えられる．すべての投資家にとって，最適ポートフォリオは効率的フロンティア上に存在する．また，効率的フロンティア上の 2 点を任意に取り，それらを組み合わせたポートフォリオは，再び効率的フロンティア上のポートフォリオとなる[23]．つまり，すべての投資家が最適ポートフォリオを実現しているとき，それらをすべて合算したポートフォリオは，効率的フロンティア上に存在し，かつ，株式時価総額の比率に等しい．つまり，市場ポートフォリオ R_M に対応する点が効率的フロンティア上に存在する．そこで，図 5.10 のように R_M から接線を引き，縦軸との切片を μ_Z とする．そして，期待収益率が μ_Z である「歪んだ傘」にあるポートフォリオの中で，分散が最小となるポートフォリオを R_Z とする．このとき，$\mathrm{Cov}(R_M, R_Z) = 0$ であることが示されるため、R_Z のベータは 0 となる．これより，R_Z を**ゼロベータポートフォリオ** (zero-beta portfolio) と呼ぶ．このとき，個別資産の収益率に対して，(5.2.1) の R_f を μ_Z に変換した式が成立する．つまり，第 k 資産の収益率は

$$\mu_k = \mu_Z + \beta_k(\mu_M - \mu_Z)$$

を満たす．この式を**ゼロベータ CAPM**(zero-beta CAPM)，または，**Black の CAPM** (Black's CAPM)[24] という．

---

[22] この Jensen はジェンセンと読む．
[23] ここで主張していることが，(正確にはちょっと違うが) 脚注 8) で述べた「2 資産分離定理」である．
[24] この Black は Black-Scholes モデルの Black である．

問 5.7 定理 5.2 の証明と同様にして，$\mathrm{Cov}(R_M, R_Z) = 0$ を示せ．(R_k の代わりに R_Z を用いればよい．) さらに，ゼロベータ CAPM を導出せよ．

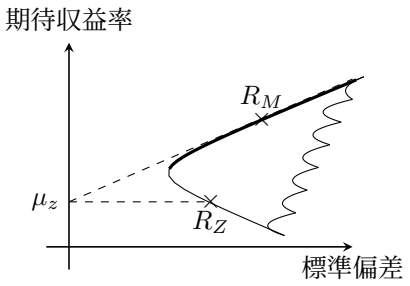


図 5.10: ゼロベータポートフォリオの導出

5.3.2 マルチファクターモデルと APT

N 個の危険資産が取引可能な 1 期間金融市場モデルにおいて，第 k 資産の収益率 R_k が，M 個の確率変数 $F_1, \ldots, F_M$ と定数項 a_k，誤差項 e_k の線形結合で与えられる場合を考える．つまり，M 個の定数 $b_{k1}, \ldots, b_{kM}$ により

$$R_k = a_k + \sum_{j=1}^{M} b_{kj} F_j + e_k \tag{5.3.1}$$

が成立しているものとする[25]．ただし，誤差項 e_k は期待値 0 の確率変数であり，$k_1 \neq k_2$ ならば $\mathrm{Cov}(e_{k_1}, e_{k_2}) = 0$，任意の $j = 1, \ldots, M$ に対して，$\mathrm{Cov}(e_k, F_j) = 0$ を満たすものとする．ここで，各 F_j を**ファクター** (factor) と呼び，$M = 1$ である場合を**シングルファクターモデル** (single factor model)，$M \geq 2$ である場合を**マルチファクターモデル** (multifactor model) という．

問 5.8 $N > M + 1$ であるマルチファクターモデルにおいて，第 1 資産から第 $M + 1$ 資産を用いて，第 $M + 2$ 資産が複製可能であることを示せ．ただし，各資産の誤差項 e_k は 0 とし，第 1 資産から第 $M + 1$ 資産は互いに複製可能でないとする．つまり，$M + 1$ 個の資産のうち他の M 個の資産を用いて複製できる資産はないとする．

多数の資産を用いてポートフォリオを組むとき，資産の数を増やすほどポートフォリオの収益率の標準偏差は小さくなる傾向にある．しかし，どんなに資産数を増やしても標準偏差が 0 になることはない．このように分散投資を行っても残るリスク (標準偏差) を**システマティックリスク** (systematic risk) とい

[25] 資産の 1 つ (ここでは第 1 資産としよう) を安全資産にしたければ，任意の j に対して $b_{1j} = 0$，$e_1 = 0$ a.s とすれば良い．なお，a_1 は金利に等しくなる．

う．一方，各資産特有のリスクを**非システマティックリスク** (nonsystematic risk) または**固有リスク** (idiosyncratic risk, specific risk) という．上記のファクターモデルにおいて，誤差項 e_k が固有リスクを表しており，それ以外の部分がシステマティックリスクに対応している．なお，マルチファクターモデルを用いる際には，ファクターとして何を選択するかは運用者の任意である．一般には，鉱工業生産指数や期待インフレ率などのマクロ経済変数や，**簿価・時価比率**[26] (book-to-market ratio) などの資産の特性を表す変数が使用される．さらに，マルチファクターモデルを実際に運用する際には，ファクター選択の他に，ファクターの係数 b_{kj} 及び定数項 a_k も決めなければならない．b_{kj} は第 k 資産の第 j ファクターへの感応度を表している．

Fama-French の 3 ファクターモデル マルチファクターモデルの具体例として最も良く知られているものは，Fama と French が提唱した 3 ファクターモデルであろう．ここでは，第 1 ファクターとして市場ポートフォリオの期待超過収益率，第 2 ファクターとして小型株効果，第 3 ファクターとして簿価・時価比率を採用している．各ファクターについてより具体的に説明しよう．まず，第 1 ファクターについては，市場ポートフォリオとして上場されている株式の収益率の時価総額による重み付け平均を取り，これと短期国債の利子率との差をファクターとする．次に第 2 ファクターについて述べよう．一般に，時価総額が小さな株式によるポートフォリオの方が，大きな株式のポートフォリオよりも収益率が高いことが知られている．これを小型株効果という．そこで第 2 ファクターとして，小型株ポートフォリオと大型株ポートフォリオの収益率の差を取る．最後の第 3 ファクターは，一般に簿価・時価比率が高い株式は低い株式よりも収益率が高くなる傾向にあるため，簿価・時価比率が高い株式によるポートフォリオと低い株式によるポートフォリオの収益率の差をファクターとして採用する． □

CAPM 再考 市場ポートフォリオの超過収益率 $R_M - R_f$ をファクターとするシングルファクターモデルにおいて，第 k 資産の超過収益率 $R_k - R_f$ は，2 つの定数 a_k, b_k と誤差項を表す確率変数 e_k を用いて

$$R_k - R_f = a_k + b_k(R_M - R_f) + e_k$$

と書くことができる．(5.3.1) と比較すると，この式は係数 a_k が R_f だけずれていることに注意しよう．この両辺に R_M との共分散を取ると，

$$\mathrm{Cov}(R_k, R_M) = b_k \,\mathrm{Var}[R_M] + \mathrm{Cov}(e_k, R_M)$$

となり，$\mathrm{Cov}(e_k, R_M) = 0$ とすれば，b_k は第 k 資産のベータと等しい．従って，第 k 資産の期待収益率 μ_k は

$$\mu_k - R_f = a_k + \beta_k(\mu_M - R_f) \tag{5.3.2}$$

[26] 貸借対照表の純資産を時価総額で割ったもの．

と表現される．つまり，CAPM(5.2.1) は $a_k = 0$ である場合に相当している．

問 5.9 $R_M = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k R_k$ と書けるとしよう．ただし，各 α_k は正で，$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k = 1$ を満たすものとする．また，任意の $k = 1, \ldots, N$ に対して，(5.3.2) が $a_k \geq 0$ として成り立つものとする．このとき，$a_k = 0$ であることを証明せよ． □

ファクターモデルの下，無裁定条件を考慮して個別資産の期待収益率を導く**裁定価格理論** (arbitrage pricing theory, APT) を紹介しよう．ここでは，$N > M + 1$ を仮定する[27)]．また，投資家は分散投資によって固有リスクを消去することができると仮定する．従って，ここでは誤差項は無視する．このとき，第 k 資産の期待収益率 μ_k は

$$\mu_k = a_k + \sum_{j=1}^{M} b_{kj} \mathbf{E}[F_j]$$

となる．一方，N 個の資産に投資する初期費用 0 のポートフォリオを考えよう．つまり，第 k 資産への投資割合を α_k としたとき，$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k = 0$ となる．これは 2 つの N 次元ベクトル $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ と $\mathbf{1} := (1, \ldots, 1)$ の内積 $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{1}$ が 0 であることと同値である．さらに，すべての $j = 1, \ldots, M$ に対して，$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k b_{kj} = 0$ となるように $\boldsymbol{\alpha}$ を選ぶ．つまり，各 j に対して $\mathbf{b}_j := (b_{1j}, \ldots, b_{Nj})$ とおけば，内積 $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{b}_j$ は 0 となる．以上より，$M + 1$ 個の N 次元ベクトル $\mathbf{1}$ 及び $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_M$ が生成する $M + 1$ 次元の線形部分空間を $L_{\mathbf{b}}$ とすれば，ベクトル $\boldsymbol{\alpha}$ は $L_{\mathbf{b}}$ に直交している．なお，$N > M + 1$ であるからこのような $\boldsymbol{\alpha}$ が存在することに注意しよう．一方，このポートフォリオの収益率を R_p とすれば，

$$R_p = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{a} + \sum_{j=1}^{M} (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{b}_j) F_j = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{a}$$

を満たす．ただし，$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_N)$ である．よって，R_p の標準偏差は 0 である．よって，ポートフォリオ $\boldsymbol{\alpha}$ の初期費用は 0 であるから，無裁定条件の下，R_p の期待値である期待収益率 μ_p は 0 になる．そこで，個別資産の期待収益率のベクトル $\boldsymbol{\mu} := (\mu_1, \ldots, \mu_N)$ を用いて μ_p を表すと，

$$\mu_p = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\mu}$$

が成立する．これは $L_{\mathbf{b}}$ に直交するすべてのベクトル $\boldsymbol{\alpha}$ に対して成立しているので，$\boldsymbol{\mu} \in L_{\mathbf{b}}$ となる．よって，$M + 1$ 個の定数 $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_M$ が存在し，

$$\boldsymbol{\mu} = \lambda_0 \mathbf{1} + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j \mathbf{b}_j$$

[27)] 一般にファクター数は 3〜5 であり，資産の数はよりずっと少ない．従って，この仮定は妥当である．

が成立する．これを $\boldsymbol{\mu}$ の成分毎に記述すると，各 $k = 1, \ldots, N$ に対して，

$$\mu_k = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j b_{kj}$$

となる．ここで，定数 $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_M$ は k に無関係であることに注意しよう．また，安全資産が含まれる場合は $\lambda_0 = R_f$ となる．

CAPM も APT も期待収益率が満たす関係式を与えているが，CAPM が均衡をベースにしているのに対し，APT は無裁定条件から導出されている．なお，ファクターモデルは確率変数である収益率に関するモデルであり，CAPM や APT とはその点において異なることに注意しよう．

第 5 章　章末問題

モデルや記号はすべて本文中に与えたものとする．

5-1　効用関数 $U(x) = 1 - e^{-x}$ を持つ投資家を考える．

1. 効用関数 U のグラフを描き，凹関数であることをグラフを用いて説明せよ．
2. 収益率 R が $\mathbf{P}(R = \log 2) = \mathbf{P}(R = \log 4) = 1/2$ を満たす資産の期待効用を計算せよ．

5-2　$\mu_k = 0.2$，$\sigma_k = 0.1$，$\mu_M = 0.5$，$\sigma_M = 0.2$，$R_f = 0.1$ とする．

1. CML の傾きを求めよ．
2. 第 k 資産と市場ポートフォリオに $a : 1 - a (0 \leq a \leq 1)$ の割合で投資するポートフォリオの収益率 R_a の期待値 μ_a と標準偏差 σ_a を求めよ．
3. 次の等式を示せ:
$$\lim_{a \to 0} \frac{\mu_a - \mu_M}{\sigma_a - \sigma_M} = \frac{3}{2 - \rho_{kM}}.$$
4. ρ_{kM} 及び β_k の値を求めよ．

5-3

1. $\mu_M = 2$，$R_f = 0.1$，$\sigma_M = 0.4$ であるとき，CML の傾きを求めよ．
2. β_k，σ_M，ρ_{kM} のみを用いて σ_k を表せ．
3. $\beta_2 = 2\beta_1$ 及び $\rho_{1M} = \rho_{2M}$ であるとき，$\sigma_2 = 2\sigma_1$ が成立していることを確認せよ．

5-4　確率変数 R に対して $S(R) := \dfrac{\mathbf{E}[R] - R_F}{\sqrt{\mathrm{Var}[R]}}$ と定義するとき，$S(R_k) = \rho_{kM} S(R_M)$ が成立することを示せ．

第6章　リスク測度

本章では，金融資産のリスク計測に用いられるリスク測度について議論する．リスク測度とは，リスクを計測したい金融資産の収益を確率変数で表現し，その確率変数に対してリスク量となる実数を与える写像である．この章の前半では，金融資産がもたらすリスクについて概観した後，代表的なリスク測度である VaR と CVaR を紹介し，これらの性質を明らかにし，リスク測度として相応しいかどうか検討する．後半では，リスク測度として満たすべき性質を公理として与え，リスク測度を抽象的に定義し，その数学的性質について議論する．なお，本章で扱うモデルはすべて 1 期間で，簡単のため金利は 0 とする．

6.1　代表的なリスク測度

金融機関にとって，自らが保有する金融資産のリスクを計測し，適切に管理することは非常に重要である．リスク計測とは「リスクの数量化」であり，より具体的には「将来発生する損失額の見積もり」，または,「将来発生する損失に対する準備として，現時点で保有すべき資金の見積もり」などを意味している．とりわけ，国際的な業務を行う金融機関には，バーゼル合意と呼ばれる自己資本比率などの規制があり，本章で紹介する VaR などを用いて，保有している金融資産のリスク管理が義務付けられている．この観点からも「リスクの数量化」は重要である．なお，金融資産を取引したり，保有することによって生じるリスク (損失の可能性) にはいくつかの種類がある．まず，株式や債券など市場で取引される資産に関して，市場価格が変動することによって生じるリスクである**市場リスク** (market risk) がある．さらに，1.1.4 節で紹介した債券の発行者がデフォルトに陥る可能性，または，貸し出した資金が回収できない可能性である信用リスク[1)]があり，市場での取引量が少なくなり，売買したいタイミングや価格で取引できなくなるリスクである**流動性リスク** (liquidity risk) や[2)]，業務上の過失，不適切な行為，システム障害などにより発生する損失である**オペレーショナルリスク** (operational risk)

[1)] デリバティブ取引などにおいて取引相手がデフォルトするリスクを**カウンターパーティーリスク** (counterparty risk) と言い，信用リスクとは区別することもある．

[2)] このような流動性リスクを市場流動性リスクと言う．これとは別に，資金繰りや資金調達に関するリスクである資金流動性リスクがある．

などもある．なお，本章で扱う「リスクの数量化」とは，市場リスクの数量化である．

リスク計測の対象となる金融資産の収益を表す確率変数に対して，そのリスク量となる実数を与える写像を**リスク測度** (risk measure) という．本節では，リスク測度の代表例を 2 つ紹介し，それらが持つ性質について議論する．

注意 6.1 第 5 章では，ポートフォリオの収益率の標準偏差をリスクと呼んだ．しかし，標準偏差は不確実性の度合いを測る尺度であり，ここで議論している「損失額の見積もり」という意味でのリスクを計測するには不適切である．

6.1.1 VaR

ある資産の収益が確率変数 X で与えられているとしよう．この資産によって発生する損失を埋め合わせるためには，どの程度の資金を保有していれば十分であろうか．X は確率変数なので，必ず損失を埋め合わすことができるように準備するには，途方もない資金が必要となる．そこで，損失が埋め合わせできない確率の許容範囲を定め，資金を準備することを考える．例えば，許容範囲を 5%とすると，準備金 v は $\mathbf{P}(-X > v) \leq 0.05$ を満たしていれば良い．従って，このような条件を満たす v の最小値を X のリスクと捉えることができる．この量をきちんと定義しよう．$\lambda \in (0,1)$ に対して，

$$\mathrm{VaR}_\lambda(X) := \inf\{v | \mathbf{P}(-X > v) \leq \lambda\}$$

を**信頼水準** (confidence level)$1-\lambda$ の**バリューアットリスク** (value at risk, VaR) という．$\lambda \in (0,1)$ を固定すれば，VaR_λ は確率変数から実数への写像である．実際に VaR を運用するには，X の確率分布の 100λ%点を推定する必要があり，高度な計量分析能力が求められる．

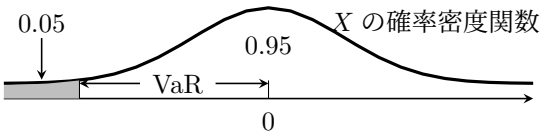


図 6.1: 信頼水準 0.95 の VaR.「VaR」とある部分の長さが $\mathrm{VaR}_{0.05}(X)$ の値である．なお，0.05 は影を付けた部分の面積，0.95 は影を付けていない部分の面積である．

問 6.1 X が標準正規分布に従うとき，$\mathrm{VaR}_{0.01}(X)$ を求めよ．ただし，標準正規分布表を用いて良い．

問 6.2 確率変数 X が離散型である場合など分布関数 F_X が不連続点を持つとき，λ を動かすと $\mathrm{VaR}_\lambda(X)$ がどのような振る舞いをするか考察せよ．ま

た，$[x_1, x_2]$ 上で F_X が増加しないときの $\mathrm{VaR}_\lambda(X)$ の振る舞いについても考察せよ．

ここで VaR の基本性質を 5 つ紹介する．なお，最初のものを除き，以下の性質は $\lambda \in (0,1)$ を任意に固定する毎に成立する:

1. $\mathrm{VaR}_\lambda(X)$ は λ について非増加である．
2. X と Y が同じ分布を持つとき，$\mathrm{VaR}_\lambda(X) = \mathrm{VaR}_\lambda(Y)$ が成立する．この性質を **law-invariance** という[3)]
3. 任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して，$\mathrm{VaR}_\lambda(X + c) = \mathrm{VaR}_\lambda(X) - c$ が成立する．これは，資産 X に資金 c を加えると，リスクはその分減少することを意味している．これを **cash-invariance** という[4)]．特に，$c = \mathrm{VaR}_\lambda(X)$ とすれば，$\mathrm{VaR}_\lambda(X + \mathrm{VaR}_\lambda(X)) = 0$ が成立する．
4. 任意の $a \geq 0$ に対して，$\mathrm{VaR}_\lambda(aX) = a\,\mathrm{VaR}_\lambda(X)$ が成立する．これを **positive homogeneity** という．資産の保有量が増えればリスクもそれに比例して増えることを表している．また，$\mathrm{Var}_\lambda(0) = 0$ となる．
5. $X \geq Y$ a.s. であるとき，$\mathrm{VaR}_\lambda(X) \leq \mathrm{VaR}_\lambda(Y)$ が成立する．これを**単調性** (monotonicity) という．将来の収益が必ず大きくなる資産の方がリスクが少ないことを意味している．

問 6.3 VaR が上記の 5 つの性質を満たしていることを証明せよ．

ここで紹介した性質はどれもリスク測度として自然なものばかりである．ところが，VaR にはリスク測度としての欠点もある．今，X を分布が $\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = -1) = 1/2$ である確率変数とし，Y を X と同分布を持つ独立な確率変数とする．このとき，$\mathrm{VaR}_{0.5}(X) = \mathrm{VaR}_{0.5}(Y) = -1$ である．一方，$\mathrm{VaR}_{0.5}\left(\dfrac{X+Y}{2}\right) = 0$ となる．従って，positive homogeneity より

$$\mathrm{VaR}_{0.5}\left(\frac{X+Y}{2}\right) > \mathrm{VaR}_{0.5}(X/2) + \mathrm{VaR}_{0.5}(Y/2)$$

が成立する．この例は，VaR がリスク測度として望ましくないことを表している．何故ならば，2 つの資産 X と Y を組み合わせたポートフォリオのリスクよりも，それぞれを個別に保有したリスクの和の方が小さくなっているからである．つまり，リスク測度としては

$$\mathrm{VaR}_\lambda(X + Y) \leq \mathrm{VaR}_\lambda(X) + \mathrm{VaR}_\lambda(Y)$$

が常に成立していることが望ましい．この性質を**劣加法性** (subadditivity) という．そこで，劣加法性を満たすように VaR を改良したものを次小節で紹介する．

[3)] law-invariance を敢えて訳せば「法則不変性」となるが，定訳ではないので英語のまま用いる．以下では「law-invariant である」という表現も用いる．なお，リスク測度に関する用語には定訳がないものが多く，そのような用語は英語のまま用いることとする．

[4)] translation invariance ともいう．

6.1.2 CVaR

確率変数 X の信頼水準 $1-\lambda$ の**条件付きバリューアットリスク** (conditinal value at risk, CVaR)[5] とは,

$$\mathrm{CVaR}_\lambda(X) := \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \mathrm{VaR}_x(X)dx.$$

によって定義される確率変数から実数への写像である. $\mathrm{CVaR}_\lambda(X) \geq \mathrm{VaR}_\lambda(X)$ が成り立つことはすぐに分かる. また, CVaR は前小節で箇条書きにした 5 つの性質及び劣加法性を満たす.

問 6.4 CVaR が箇条書きにした 5 つの性質を満たしていることを証明せよ. なお, 劣加法性の証明はかなりの準備を要するのでここでは扱わない[6].

なお, CVaR は positive homogeneity と劣加法性を同時に満たすので, 2 つの確率変数 X, Y と $a \in [0,1]$ に対して

$$\mathrm{CVaR}_\lambda(aX + (1-a)Y) \leq a\,\mathrm{CVaR}_\lambda(X) + (1-a)\,\mathrm{CVaR}_\lambda(Y)$$

が成立する. つまり, CVaR は凸関数である[7]. ここで, 図 6.1 において影を付けた部分における $-X$ の期待値, つまり, $-\mathrm{VaR}_\lambda(X)$ よりも X の値が小さいという条件下における損失額 $-X$ の期待値を $\mathrm{TVaR}_\lambda(X)$ と表し, **テールバリューアットリスク** (tail value at risk, TVaR)[8] と呼ぶ. つまり,

$$\mathrm{TVaR}_\lambda(X) := \mathbf{E}[-X | X \leq -\mathrm{VaR}_\lambda(X)]$$

である[9]. このとき, 以下で示すように一定の条件下で CVaR と TVaR は等しくなる.

命題 6.2 確率変数 X の分布関数が微分可能かつ単調増大であるとき, $\mathrm{CVaR}_\lambda(X) = \mathrm{TVaR}_\lambda(X)$ が成立する.

証明. まず, 確率変数 X の分布関数 F_X は連続なので

$$\mathbf{P}(X \leq -\mathrm{VaR}_\lambda(X)) = F_X(-\mathrm{VaR}_\lambda(X)) = \lambda$$

が成立する. よって, TVaR の定義より,

$$\mathrm{TVaR}_\lambda(X) = \mathbf{E}[-X | X \leq -\mathrm{VaR}_\lambda(X)] = \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{-\mathrm{VaR}_\lambda(X)} (-x) f_X(x)dx$$

---

[5] CVaR は, **平均バリューアットリスク** (average value at risk, AVaR) と呼ばれることもある.
[6] これについては例 6.10 で述べる.
[7] 凸関数の定義については定理 3.5 を参照せよ.
[8] **期待ショートフォール** (expected shortfall, ES) と呼ばれることもある.
[9] 条件付き期待値については A.1.4 節を参照せよ.

となる．ただし，f_X は X の確率密度関数である．ここで，$u = F_X(x)$ と変数変換すると，$du = f_X(x)dx$ より

$$\mathrm{TVaR}_\lambda(X) = -\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda F_X^{-1}(u)du$$

が成立する．ここで，F_X が単調増大であることから逆関数 F_X^{-1} が存在することを用いた．一方，$-\mathrm{VaR}_\lambda(X) = F_X^{-1}(\lambda)$ であるから，上式の右辺は $\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \mathrm{VaR}_u(X)du$ となり，CVaR の定義より，$\mathrm{TVaR}_\lambda(X) = \mathrm{CVaR}_\lambda(X)$ が成立する． □

注意 6.3 確率変数 X が標準正規分布に従うときは $-xf_X(x) = f_X'(x)$ が成立するので，上記の命題を用いなくても CVaR と TVaR が等しいことを直接示すことができる．

6.2 公理論的リスク測度

前節では VaR など具体的なリスク測度を紹介したが，ここでは確率変数から実数への写像 ρ がリスク測度になるために持つべき性質を整理し，リスク測度の一般的な枠組みを与える．このような性質として，6.1.1 節で箇条書きにしたものや劣加法性が挙げられるが，law-invariance は省いても構わないので，cash-invariance，positive homogeneity，単調性，劣加法性の 4 つを考える．確率変数から実数への写像 ρ がこれら 4 つの性質を満たすとき，**コヒーレントリスク測度** (coherent risk measure) であるという．また，positive homogeneity の代わりに ρ が凸性を満たすとき，**凸リスク測度** (convex risk measure) であるという．

6.2.1 定義と例

まず，コヒーレントリスク測度と凸リスク測度のきちんとした定義を与えよう．そこで，$\mathcal{X}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 上の本質的に有界な確率変数の全体とする．なお，確率変数 X が本質的に有界であるとは，ある $M > 0$ が存在して $\mathbf{P}(|X| > M) = 0$ を満たすときにいう．

定義 6.4 写像 $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ が凸リスク測度であるとは[10)]，任意の $X, Y \in \mathcal{X}$ に対して，

1. (Cash-invariance) $\rho(X + c) = \rho(X) - c$, $\forall c \in \mathbb{R}$.
2. (凸性) $\rho(aX + (1-a)Y) \le a\rho(X) + (1-a)\rho(Y)$, $\forall a \in [0, 1]$.

[10)]「ρ は $\mathcal{X}$ 上の写像である」と言ったときは，$X = Y$ a.s. であるならば $\rho(X) = \rho(Y)$ が成立しているものとする．

3. (単調性) $X \geq Y$ a.s.$\Longrightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$.

を満たすときにいう．さらに，凸リスク測度 ρ が

4. (Positive homogeneity) $\rho(aX) = a\rho(X)$, $\forall a \geq 0$.

を満たすとき，コヒーレントリスク測度であるという．

例 6.5 VaR はコヒーレントリスク測度でも凸リスク測度でもない．一方，前小節で紹介したように CVaR はコヒーレントリスク測度である．また，コヒーレントリスク測度の単純な例として，$\rho(X) := \mathbf{E}[-X]$ が挙げられる．さらに，$\beta > 0$ に対して，

$$\rho_\beta^{\mathrm{ent}}(X) := \frac{1}{\beta} \log \mathbf{E}\left[e^{-\beta X}\right]$$

を**エントロピックリスク測度** (entropic risk measure) という．これは凸リスク測度であるがコヒーレントリスク測度ではない．つまり，コヒーレントリスク測度は常に凸リスク測度であるが，この例はその逆は成り立たないことを示している．

例 6.6 これまでに紹介したリスク測度はすべて law-invariant である．一方，確率測度 $\mathbf{Q}$ に対して，$\rho_{\mathbf{Q}}(X) := \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[-X]$ と定義すると，これは law-invariant でないコヒーレントリスク測度である．

問 6.5 凸リスク測度 ρ と実数 c に対して，$\rho_c(X) := \rho(X + c)$ により新たな写像 $\rho_c : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ を定義する．このとき，ρ_c も凸リスク測度であることを示せ．また，ρ がコヒーレントリスク測度であるとき，ρ_c もそうであることを示せ．

6.2.2 Acceptance set と表現定理

写像 $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ は，cash-invariance と単調性を満たすものとする．今，

$$\mathcal{A}_\rho := \{X \in \mathcal{X} | \rho(X) \leq 0\}$$

により定義される集合 $\mathcal{A}_\rho \subset \mathcal{X}$ を，ρ の **acceptance set** という．このとき，以下の 2 つの命題が成立する:

命題 6.7 1. $X \in \mathcal{A}_\rho$, $Y \geq X$ a.s. であるならば，$Y \in \mathcal{A}_\rho$ である．

2. $\rho(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} | X + m \in \mathcal{A}_\rho\}$.
3. ρ が凸リスク測度であることと，$\mathcal{A}_\rho$ が凸であることは同値である．
4. ρ がコヒーレントリスク測度であることと，$\mathcal{A}_\rho$ が凸錐であることは同値である[11)]．

[11)] 錐の定義については注意 2.11 を参照せよ．

証明. ρ の単調性より 1 を得る．2 については，ρ は cash-invariant なので，

$$\begin{aligned}\inf\{m \in \mathbb{R} | X + m \in \mathcal{A}_\rho\} &= \inf\{m \in \mathbb{R} | \rho(X + m) \leq 0\} \\ &= \inf\{m \in \mathbb{R} | \rho(X) \leq m\} = \rho(X)\end{aligned}$$

より得られる．さらに，ρ が凸リスク測度であるとき，任意の $X, Y \in \mathcal{A}_\rho$ と任意の $a \in [0, 1]$ に対して，$\rho(aX + (1-a)Y) \leq a\rho(X) + (1-a)\rho(Y) \leq 0$ より，$aX + (1-a)Y \in \mathcal{A}_\rho$ である．よって，$\mathcal{A}_\rho$ は凸である．次に，$\mathcal{A}_\rho$ が凸であるとき ρ も凸であることを示そう．今，$m_X, m_Y \in \mathbb{R}$ を $X + m_X \in \mathcal{A}_\rho$, $Y + m_Y \in \mathcal{A}_\rho$ を満たすように取る．一方，$\mathcal{A}_\rho$ は凸なので，任意の $a \in [0, 1]$ に対して，$a(X + m_X) + (1-a)(Y + m_Y) \in \mathcal{A}_\rho$ である．よって，

$$\begin{aligned}0 &\geq \rho(a(X + m_X) + (1-a)(Y + m_Y)) \\ &\geq \rho(aX + (1-a)Y) - am_X - (1-a)m_Y\end{aligned}$$

が成立する．つまり，$\rho(aX + (1-a)Y) \leq am_X + (1-a)m_Y$ となる．ここで，$m_X = \rho(X)$, $m_Y = \rho(Y)$ を代入すれば，ρ の凸性が得られる．なお，4 は 3 と同様にして示せるので 4 の証明は省略する． □

問 6.6 省略した 4 の証明を与えよ．

命題 6.8 空でない凸集合 $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ が，$\inf\{m \in \mathbb{R} | m \in \mathcal{A}\} > -\infty$ 及び，「$X \in \mathcal{A}, Y \geq X$ a.s.$\Longrightarrow Y \in \mathcal{A}$」を満たすとき，$\mathcal{A}$ を acceptance set とする凸リスク測度が存在する．さらに，$\mathcal{A}$ が錘であるとき，$\mathcal{A}$ を acceptance set とするコヒーレントリスク測度が存在する．

証明. $\rho_{\mathcal{A}}(X) := \inf\{m \in \mathbb{R} | m + X \in \mathcal{A}\}$ が凸リスク測度であることを示せば十分である．$\rho_{\mathcal{A}}$ が cash-invariant であることは明らか．また，$\mathcal{A}$ の凸性より $\rho_{\mathcal{A}}$ も凸である．さらに，$\mathcal{A}$ に関する 2 つ目の条件から $\rho_{\mathcal{A}}$ の単調性も得られる．最後に，$\rho_{\mathcal{A}}(X) \in \mathbb{R}$ であることを示す．まず，$\mathcal{X}$ の定義より，$m_X + X \leq 0$ a.s. なる実数 m_X が存在する．従って，任意の $X \in \mathcal{X}$ に対して，$\rho_{\mathcal{A}}(X) < \infty$ である．一方，$\mathcal{A}$ に関する最初の条件より $\rho_{\mathcal{A}}(0) > -\infty$ であるから，$\rho_{\mathcal{A}}$ の cash-invariance 及び単調性より，$\rho_{\mathcal{A}}(X) = \rho_{\mathcal{A}}(m_X + X) + m_X \geq \rho_{\mathcal{A}}(0) + m_X > -\infty$ となる．よって，$\rho_{\mathcal{A}}$ は実数に値を取る写像である． □

この小節の最後に，凸リスク測度 ρ の表現定理を紹介する．いくつか準備をしよう．ρ の acceptance set を $\mathcal{A}_\rho$，$\mathcal{P}$ を可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の $\mathbf{P}$ に対して絶対連続な確率測度の全体とする．このとき，$\mathcal{P}$ 上の関数 α を

$$\alpha(\mathbf{Q}) := \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[-X], \quad \mathbf{Q} \in \mathcal{P}$$

により定義する．これを**ペナルティ関数** (penalty function) という．さらに，確率変数列 $\{X_n\} \subset \mathcal{X}$ と確率変数 $X \in \mathcal{X}$ が，条件「任意の $\omega \in \Omega$ に対して，

$\{X_n(\omega)\}$ は単調非減少で，$X_n(\omega) \to X(\omega)$」を満たすとき，$\rho(X_n) \to \rho(X)$ であるならば，ρ は**下から連続** (continuous from below) であるという．

定理 6.9 下から連続である凸リスク測度 ρ は，

$$\rho(X) = \max_{\mathbf{Q}\in\mathcal{P}} \{\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[-X] - \alpha(\mathbf{Q})\}$$

と表現される．

なお，ρ がコヒーレントリスク測度であるとき，そのペナルティ関数は 0 または $+\infty$ の値しかとらない．よって，$\mathcal{P}_0 := \{\mathbf{Q} \in \mathcal{P} | \alpha(\mathbf{Q}) = 0\}$ とすれば，下から連続であるコヒーレントリスク測度 ρ は

$$\rho(X) = \max_{\mathbf{Q}\in\mathcal{P}_0} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[-X]$$

により与えられる．

例 6.10 CVaR は下から連続であることが知られている．今，$\lambda \in (0, 1)$ に対して，

$$\mathcal{P}_\lambda := \left\{ \mathbf{Q} \in \mathcal{P} \;\middle|\; \mathbf{Q} \ll \mathbf{P},\ \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \leq \frac{1}{\lambda} \right\}$$

とする．なお，$\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$ とは，任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して，$\mathbf{Q}(A) = 0$ ならば $\mathbf{P}(A) = 0$ であることを意味している．また，$d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ は 4.1.2 節で紹介した Radon-Nikodym 導関数である．よって，CVaR_λ のペナルティ関数 α_λ は，

$$\alpha_\lambda(\mathbf{Q}) = \begin{cases} 0, & \text{if } \mathbf{Q} \in \mathcal{P}_\lambda, \\ +\infty, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

となり，

$$\mathrm{CVaR}_\lambda(X) = \max_{\mathbf{Q}\in\mathcal{P}_\lambda} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[-X]$$

と表現される．これより CVaR が劣加法性を満たすことが分かる．

例 6.11 例 6.5 で紹介したエントロピックリスク測度 $\rho_\beta^{\mathrm{ent}}$ は明らかに下からの連続性を持つ．なお，ペナルティ関数 α_β は

$$\alpha_\beta(\mathbf{Q}) = \frac{1}{\beta}\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left[\log \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\right]$$

により与えられることが知られている．なお，$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[\log(d\mathbf{Q}/d\mathbf{P})]$ を ($\mathbf{Q}$ の $\mathbf{P}$ に関する) **相対エントロピー**といい[12)]，$H(\mathbf{Q}|\mathbf{P})$ と書く．従って，

$$\rho_\beta^{\mathrm{ent}}(X) = \max_{\mathbf{Q}\in\mathcal{P}} \left\{ \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[-X] - \frac{1}{\beta} H(\mathbf{Q}|\mathbf{P}) \right\} \tag{6.2.1}$$

と表現できる．なお，この表現を用いれば，$\rho_\beta^{\mathrm{ent}}$ が凸性を持つことはすぐに分かる．

[12)] 相対エントロピーは情報理論に登場する概念であり，雑に言えば 2 つの確率測度の距離を表している．

第 6 章　章末問題

6-1　例 6.6 で定義した $\rho_{\mathbf{Q}}$ が law-invariant にならない例を挙げよ．

6-2　例 6.5 で紹介したエントロピックリスク測度 $\rho_\beta^{\mathrm{ent}}$ がコヒーレントリスク測度ではないことを証明せよ．

6-3　コヒーレントリスク測度のペナルティ関数は 0 または $+\infty$ の値しかとらないことを証明せよ．

6-4　Ω は有限集合であるとし，任意の $\omega \in \Omega$ に対して，$\mathbf{P}(\omega) > 0$ であるとする．このとき，$\rho_{\max}(X) := \max_{\omega\in\Omega}(-X(\omega)) = -\min_{\omega\in\Omega} X(\omega)$ と定義する．

1. $\rho_{\max}$ がコヒーレントリスク測度であることを示せ．
2. $\rho_{\max}$ のペナルティ関数を求めよ．
3. 任意の $X \in \mathcal{X}$ に対して，

$$\lim_{\beta\to\infty} \rho_\beta^{\mathrm{ent}}(X) = \rho_{\max}(X)$$

であることを証明せよ．

補遺 A:　確率論

1.3 節で述べたように，ファイナンス論に登場する数理モデルは確率モデルである．従って，ファイナンス論の理解には確率論の基本概念を押さえていることが必須である．そこで，必要となる確率論の基本概念，用語，記号，定理や法則などについてまとめておく．まず，標本空間が有限である場合を取り上げ，確率空間，確率変数，期待値，条件付き期待値などを紹介する．離散時間型のオプション価格付け理論を理解するには，この有限集合上の確率論で十分である．一方，Black-Scholes モデルのような連続時間型モデルを扱うには，無限集合上の確率論が必要となる．そこで，A.2 節では必要最小限のことを紹介する．とりわけ，中心極限定理などの極限定理が重要となる．そこで，この補遺の後半では確率変数列の収束や極限定理について，やや詳しく述べる．

A.1　有限集合上の確率論

不確実性を伴うモデルの中でも，起こり得る事象が特定され，各事象の確率も与えられているモデルを確率モデルといい，その解析には確率論を必要とする．将来起こり得る事象の全体を**標本空間** (sample space) と呼び，Ω と記述することにしよう．例えば，コイン投げのモデルでは，表が出るか，裏が出るかの 2 通りなので，それぞれの事象を H, T とすると，$\Omega = \{H, T\}$ となる．この節では，Ω が有限集合である場合に限定し，確率論の基礎的概念を一通り紹介する．

A.1.1　確率空間

標本空間 Ω が N 個の要素から成る集合とする．このとき，

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$$

と書ける[1)]．Ω の部分集合 A に対して，A が起こる確率を関数 $\mathbf{P}$ を用いて，$\mathbf{P}(A)$ と記述しよう．例えば，$A = \{\omega_1, \omega_2\}$ であれば，$\mathbf{P}(A)$ は事象 ω_1 または ω_2 が起こる確率を表しており，$A = \{\omega_3\}$ ならば，$\mathbf{P}(A)$ は事象 ω_3 が起こる確率である．なお，$A \subset \Omega$ の確率を定めることができないとき，A を $\mathbf{P}$ の

[1)] 確率論では集合の記号を多用する．必要ならば，各自復習しておくこと．

定義域から外す必要があるが，この節では簡単のため，$\mathbf{P}$ の定義域を Ω の部分集合の全体とし，$\mathcal{F}$ で記述する[2)3)]．例えば，$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ であるとき，

$$\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}\}$$

となる[4)]．言い換えれば，すべての部分集合 $A \subset \Omega$ に対して，確率 $\mathbf{P}(A)$ が定まっていると仮定する．なお，Ω と $\mathcal{F}$ をペアにしたもの $(\Omega, \mathcal{F})$ を**可測空間** (measurable space) という．

ここで，$\mathbf{P}(A)$ は確率であるから，0 以上 1 以下の値を取るはずである．これ以外にも $\mathbf{P}$ が確率を定める関数であるために要求する条件として，

1. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$,
2. (σ**-加法性** (σ-additivity)) $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ が互いに素[5)]であるならば，

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k)$$

が成立する[6)]，

を課す．つまり，$\mathbf{P}$ は $\mathcal{F}$ 上に定義された上記 2 つの条件を満たす $[0,1]$-値関数である．このような関数を，$(\Omega, \mathcal{F})$ 上の**確率測度** (probability measure)，または単に**確率** (probability) といい，Ω，$\mathcal{F}$ 及び $\mathbf{P}$ を組にしたもの $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ を**確率空間** (probability space) という．なお，可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ が与えられたとき，その上に定義され得る確率測度は 1 つではないことに注意しよう．

例 A.1 サイコロを一度だけ振るモデルを考えよう．1 から 6 の何れかの目が出るので，起こり得る事象は 6 つである．そこで，$k = 1, \ldots, 6$ に対して，k の目が出る事象を ω_k とすれば，標本空間 Ω は $\{\omega_k | k = 1, \ldots, 6\}$ となる．また，どの目が出る確率も「同様に確からしい」ことを仮定すれば，$k = 1, \ldots, 6$ に対して，$\mathbf{P}(\{\omega_k\}) = 1/6$ となる．これにより，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ が与えられる．

注意 A.2 有限確率空間を考える際，任意の $\omega \in \Omega$ に対して $\mathbf{P}(\{\omega\}) > 0$ であると仮定することが多い．何故ならば，$\mathbf{P}(\{\omega\}) = 0$ となる $\omega \in \Omega$ は，初めから除外すれば良いからである． □

[2)] $\mathcal{F}$ を Ω のべき集合という．Ω が N 個の要素持つとき，$\mathcal{F}$ は 2^N 個の部分集合なら成る．ここで，$\mathcal{F}$ は集合を要素に持つ集合である．なお，集合を要素に持つ集合を集合族という．

[3)] Ω が有限であっても，$\mathcal{F}$ がべき集合でない場合もある．例えば，3.1.2 節におけるフィルトレーションに関する記述を参照せよ．

[4)] $\emptyset$ は空集合である．

[5)] $i \neq j$ ならば $A_i \cap A_j = \emptyset$.

[6)] この節では Ω を有限集合としているので，有限個を除いて A_k は空集合である．つまり，無限個の部分集合に対する加法性を考える必要はない．しかし，後々の議論を踏まえ，このように定義しておく．

A.1.2　確率変数と期待値

例 A.1 のモデルに対し，出た目に応じて得点を与えるゲームを考える場合など，生じた事象に対して数値を与えておくと便利なことが多い．そこで，Ω 上に定義された実数値関数を**確率変数** (random variable) と呼び，確率モデルの解析の様々な場面で登場する．例えば，例 A.1 において，出た目を表す確率変数を X とすれば，$k = 1, \dots, 6$ に対して $X(\omega_k) := k$ と定義される．なお，時間パラメータが付いた確率変数の集まりを**確率過程** (stochastic process) という．確率過程を記述するときは，$\{X_t\}_{t=1,\dots,T}$ のように中括弧 $\{\cdot\}$ を用いて，右下に時間パラメータの範囲を明示する．時間パラメータの範囲が明らかであるときは，$\{X_t\}$ のように略記することもある．

確率変数がある値を取る確率を考えたい．そのような確率は

$$\mathbf{P}(\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\})$$

と記述される．これを $x \in \mathbb{R}$ の関数と見なしたものを，確率変数 X の**分布** (distribution) と呼ぶ．標本空間が有限集合である場合，確率変数は有限個の値しかとらない．一般に，確率変数の値域が高々可算[7)]である場合，このような関数を**確率関数** (probability function) と呼ぶことがある．なお，$\mathbf{P}(\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\})$ を $\mathbf{P}(X = x)$ と略記することが多い．

確率変数 X に対して，その平均的な値を表す数を**期待値** (expectation, expected value) といい，$\mathbf{E}[X]$ と表す．この「平均的な値」とは，「確率変数の値」×「確率」を足し合わせることで得られる．従って，期待値 $\mathbf{E}[X]$ は

$$\mathbf{E}[X] := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbf{P}(\{\omega\})$$

と定義される．また，X の値ごとに和を取り直すと，

$$\mathbf{E}[X] := \sum_{x} x\mathbf{P}(X = x)$$

と定義することも可能である．なお，この 2 つ目の定義において，和を取る範囲は X の値域全体である．

例 A.3 例 A.1 で紹介した確率モデルに対し，上記で紹介した出た目を表す確率変数 X の期待値を計算すると，

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{k=1}^{6} X(\omega_k)\mathbf{P}(\{\omega_k\}) = \sum_{k=1}^{6} k\frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

となる．

[7)] 有限または可算という意味である．なお，可算とは無限に多く存在しているが，自然数の全体 $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ と 1 対 1 の対応がつけられるという意味である．例えば，整数の全体 $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ や有理数の全体 $\mathbb{Q}$ は可算集合であるが，実数の全体 $\mathbb{R}$ は可算ではない．

期待値の基本性質をいくつか紹介する:

1. $\mathbf{P}(X \geq 0) = 1$ であるならば，つまり，任意の $\omega \in \Omega$ に対して $X(\omega) \geq 0$ であるならば，$\mathbf{E}[X] \geq 0$ が成立する．より一般に，$\mathbf{P}(X \geq Y) = 1$ であるならば，$\mathbf{E}[X] \geq \mathbf{E}[Y]$ となる．
2. 実数 c は $\mathbf{P}(X = c) = 1$ を満たす確率変数と同一視できるので，実数 c を確率変数と見なすことができ，$\mathbf{E}[c] = c$ が成立する．
3. $\mathbf{E}[aX + bY] = a\mathbf{E}[X] + b\mathbf{E}[Y]$, $a, b \in \mathbb{R}$ が成り立つ．
4. 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して，$\mathbf{E}[f(X)]$ は

$$\mathbf{E}[f(X)] = \sum_{\omega \in \Omega} f(X(\omega))\mathbf{P}(\{\omega\}) = \sum_{x} f(x)\mathbf{P}(X = x) \qquad \text{(A.1.1)}$$

により与えられる．なお，$f(X)$ も確率変数である．

問 A.1 上記 1-3 を確認せよ．

A.1.3 分散・共分散・相関係数

上述の (A.1.1) において，$f(x) = (x - \mathbf{E}[X])^2$ であるとき，$\mathbf{E}[f(X)]$ を X の**分散** (variance) と呼び，$\mathrm{Var}[X]$ などと記述する．これは，確率変数がその期待値からどの程度散らばっているかを測る尺度，別の言い方をすれば，分布がどの程度広がっているかを測る尺度であり，分散が大きい程散らばり具合も大きくなる．一方，分散は確率変数の 2 乗で定義されているため，スケールを合わせる必要があるときは，分散の非負の平方根 $\sqrt{\mathrm{Var}[X]}$ を用いることもある．これを X の**標準偏差** (standard deviation) と呼ぶ．

例 A.4 サイコロを一度振り，その出た目を表す確率変数 X の分散は

$$\mathrm{Var}[X] = \sum_{k=1}^{6} (X(\omega_k) - \mathbf{E}[X])^2 \mathbf{P}(\{\omega_k\}) = \sum_{k=1}^{6} \left(k - \frac{7}{2}\right)^2 \frac{1}{6} = \frac{35}{12}$$

となる．

2 つの確率変数 X と Y に対して，これらの関係を調べるとき，以下で定義する**共分散** (covariance) が用いられることが多い:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) := \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])(Y - \mathbf{E}[Y])].$$

共分散の値が正であるならば，X がその期待値より大きな値を取るとき，Y の値もその期待値より大きくなる傾向があり，X の値が期待値より小さいならば，Y の値も期待値より小さくなる傾向があることを示している．一方，共分散が負の値を取るときは，X と Y が逆の動きを取る傾向があることを示している．ただし，X 及び Y の標準偏差の値が大きいとき，共分散の絶対値も大きくなることから，純粋に 2 つの確率変数の関係性を表しているとは

言い難い．そこで，共分散を標準偏差で割ったものを考え，それを**相関係数** (correlation coefficient) と呼ぶ．より正確には，X と Y の相関係数 ρ_{XY} は

$$\rho_{XY} := \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]}\sqrt{\mathrm{Var}[Y]}}$$

により定義される．

最後に，分散，共分散，相関係数の基本性質を列挙する．以下，X, Y, Z を確率変数，$a, b, c \in \mathbb{R}$ とする．

1. $\mathrm{Var}[X] \geq 0$, $\mathrm{Var}[X] = \mathbf{E}\left[(X - \mathbf{E}[X])^2\right] = \mathbf{E}\left[X^2\right] - (\mathbf{E}[X])^2$.
2. $\mathrm{Var}[aX + c] = a^2 \mathrm{Var}[X]$，特に，$\mathrm{Var}[c] = 0$.
3. $\mathrm{Var}[aX + bY] = a^2 \mathrm{Var}[X] + b^2 \mathrm{Var}[Y] + 2ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$,
4. $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$, $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}[X]$, $\mathrm{Cov}(X,c) = 0$.
5. $\mathrm{Cov}(aX,bY) = ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$, $\mathrm{Cov}(X+Y,Z) = \mathrm{Cov}(X,Z) + \mathrm{Cov}(Y,Z)$.
6. $Y = aX$ であるとき，$a > 0$ ならば $\rho_{XY} = 1$，$a < 0$ ならば $\rho_{XY} = -1$.
7. $|\rho_{XY}| \leq 1$

問 A.2 上記 7 つの性質を確認せよ．なお，7 を示すには Cauchy-Schwarz の不等式を用いると良い．

A.1.4 独立性と条件付き確率[8)]

2 つの事象 $A, B \in \mathcal{F}$ が

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$$

を満たすとき，A と B は**独立** (independent) であるという．例えば，赤と白のコインを 1 枚ずつ同時に投げるモデルを考えよう．「赤のコインは表」となる事象を A,「白のコインは表」となる事象を B とし，すべての事象は同様に確からしいとする．このとき，$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = 1/2$，$\mathbf{P}(A \cap B) = 1/4$ であるから，A と B は独立である．また，N 個の事象 $A_1, A_2, \ldots, A_N$ が独立であるとは，任意の $1 \leq k \leq N$ と任意の $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq N$ に対して，

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} \mathbf{P}(A_{i_j})$$

が成立するときに言う．例えば，3 つの事象 A, B, C が独立であるとは，これらのうちどの 2 つを選んでも独立で，かつ，$\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$ が成立するときに言う．

次に，確率変数の独立性について述べよう．2 つの確率変数 X, Y が独立であるとは，任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\mathbf{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y)$$

[8)] この小節の内容の殆どは，有限とは限らない一般の確率空間の場合にも適用できる．

を満たすときに言う．ただし，x, y については，$\mathbf{P}(X = x) > 0, \mathbf{P}(Y = y) > 0$ となるものについて確かめれば十分である．この定義は，2 つの事象の独立性と類似していることに気づくであろう．さらに，3 つ以上の確率変数の独立性も，事象の独立性と同様に定義できる．さらに，確率変数列 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が**独立同一分布**に従う (independent and identically distributed, i.i.d.)[9] とは，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ が独立で，かつ同じ分布を持つときにいう．

問 A.3 2 つの確率変数 X と Y が独立ならば，$\mathrm{Cov}(X, Y) = \rho_{XY} = 0$ であることを示せ[10]．

2 つの事象 $A, B \in \mathcal{F}$ に対して，事象 B が起こった場合の事象 A の**条件付き確率** (conditional probability of A given B) は，

$$\mathbf{P}(A|B) := \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$$

と定義される．ただし，$\mathbf{P}(B) > 0$ であるとする．A と B が独立であれば，$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$ が成立する．これを独立性の定義としている教科書もある．さらに，B を固定すれば，$\mathbf{P}(\cdot|B)$ は可測空間 $(A, \mathcal{F}_A)$ 上の確率測度になる．ただし，$\mathcal{F}_A$ は A のべき集合である．そして，この条件付き確率の下で期待値を計算したものを**条件付き期待値** (conditional expectation) と言い，$\mathbf{E}[X|B]$ と記述する．つまり，$\mathbf{E}[X|B]$ は

$$\mathbf{E}[X|B] := \sum_{\omega \in B} X(\omega)\mathbf{P}(\{\omega\}|B) = \sum_{x} x\mathbf{P}(X = x|B)$$

と定義される．2 つ目の和の記号は，$\mathbf{P}(X = x|B) > 0$ となる x 上で取る．また $\mathbf{E}[Y|X = x]$ は，確率変数 X がある値 x を取る事象を条件にした場合の Y の条件付き期待値である．さらに，任意の $\omega \in \Omega$ に対して，$X(\omega)$ の値を x として，$Z(\omega) := \mathbf{E}[Y|X = x]$ により定義される確率変数 Z を，$\mathbf{E}[Y|X]$ と記述し，X の下での Y の条件付き期待値という．これは期待値という名前がついているが，確率変数であることに注意せよ．条件付き期待値 $\mathbf{E}[Y|X]$ は，以下の性質を持つ:

1. Y が X の値に応じて決まるとき，つまり，X の関数であるとき，$\mathbf{E}[Y|X] = Y$ となる．
2. Y と X が独立であるとき，$\mathbf{E}[Y|X] = \mathbf{E}[Y]$ となる．

問 A.4 これら 2 つを確認せよ．

問 A.5 例 A.1 で与えたサイコロのモデルに対して，$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$，$B = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ としたとき，A と B は独立でないことを確認せよ．また，$\mathbf{P}(A|B)$ の値を求めよ．

---

[9] この講義ノートでは，i.i.d. と呼ぶ．

[10] 実は，この逆は成立しないこともある．つまり，共分散が 0 でも X と Y が独立とは限らないのである．

最後に，確率過程 $\{X_t\}$ が，任意の $t > s$ に対して $\mathbf{E}[X_t|X_s] = X_s$ を満たすとき，**マルチンゲール** (martingale) であるという．ただし，この定義は少し正確性に欠ける．より正確な定義は [8, 舟木] などを参照されたい．

問 A.6 $\{X_t\}$ がマルチンゲールであるとき，任意の $t \geq 0$ に対して，$\mathbf{E}[X_t] = X_0$ であることを示せ．ただし，X_0 は定数とする．

A.2 測度論的確率論の基礎

連続時間モデルにおける標本空間はもはや有限集合ではなく，非常に巨大な集合となる．例えば，時間区間 $[0, T]$ 上の標準 Brown 運動を考えるとき，標本空間 Ω として，$f(0) = 0$ となる $[0, T]$ 上の連続関数 f の全体を取ることがある．これは非常に大きな集合であることが想像できるであろう．このような大きな標本空間の下では，すべての部分集合に確率を定めることはできない．つまり，$\mathcal{F}$ として Ω のべき集合を取ることができないのである[11)]．このように，Ω として一般の集合を考えると，前節で述べてきた枠組みでは収まりきらないことが分かる．この節では，Ω が有限とは限らない一般の集合である場合を対象に，確率空間，確率変数，期待値など確率論における基礎的概念の定義を与える．なお，この節の内容を正確に議論するには，ルベーグ測度論が必要となる．従って，一つ一つを丁寧に説明していると膨大な量になってしまうので，最低限理解しておいて欲しい内容だけに絞って紹介する．

A.2.1 確率空間

標本空間 Ω が与えられたとき，確率を定めることができる Ω の部分集合の全体を $\mathcal{F}$ と記述し，これらをペアにしたもの $(\Omega, \mathcal{F})$ を可測空間と呼ぶ．また，$A \in \mathcal{F}$ に対して，A が起こる確率を $\mathbf{P}(A)$ と，関数 $\mathbf{P}$ を用いて表現する．この $\mathbf{P}$ は，$\mathcal{F}$ 上に定義された $[0, 1]$-値関数で，$\mathbf{P}(\Omega) = 1$ であり，A.1.1 節で紹介した σ-加法性を満たすものである．これを $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度という．さらに，これらを 3 つ組にしたもの $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ を確率空間と呼んだ．ここまでの議論は前節と同じである．

前節では標本空間 Ω が有限集合である場合を扱った．そこでは $\mathcal{F}$ として Ω のべき集合を取ったが，Ω が大きな集合になると，もはや $\mathcal{F}$ としてべき集合を取ることはできない．そこで，$\mathcal{F}$ が満たすべき条件を整理し，その範囲内で $\mathcal{F}$ を設定する．なお，$\mathcal{F}$ に含まれる Ω の部分集合を**可測集合** (measurable set) と呼ぶ．それでは，$\mathcal{F}$ が満たすべき条件とは何であろうか?

[11)] この事実の詳細を述べるにはルベーグ測度論が必要となるため，ここではこれ以上立ち入らない．

まず，全体集合 Ω は可測でないと不都合である[12]．また，$A \in \mathcal{F}$ ならば，その余事象の確率は $\mathbf{P}(A^c) = 1 - \mathbf{P}(A)$ であることは $\mathbf{P}$ の加法性より明らかなので，$A^c \in \mathcal{F}$ も自然であろう[13]．そして，2 つの可測集合 (互いに素とは限らない) の和集合が可測であることも自然な要請であろう．この性質を加法性と呼ぶが，ここでは可算個の可測集合の和集合も再び可測であることを条件として加える．以上まとめると，$\mathcal{F}$ は Ω の部分集合から成る集合族で，以下の 3 つの条件を満たしているとする:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
2. $A \in \mathcal{F}$ ならば $A^c \in \mathcal{F}$,
3. $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ ならば $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$.

上記の条件を満たしている集合族を **σ-加法族** (σ-field, σ-algebra) という．なお，Ω が与えられているとき，その上の σ-加法族は 1 つに定まる訳ではない．以上より，まず標本空間 Ω が与えられ，その上の σ-加法族 $\mathcal{F}$ を設定し，$(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度 $\mathbf{P}$ が与えられたとき，これらを組にしたもの $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ を確率空間と呼ぶ．なお，確率モデルにはその背後に必ず確率空間が存在する．しかし，確率空間の各構成要素は，対象となる確率モデルに沿って適切に与えられていることを前提とし，その限りにおいてモデルの解析にあまり影響を与えない．従って，確率空間を陽に記述することは少ない．

A.2.2　確率変数・分布・期待値

前節では，確率変数を Ω 上に定義された実数値関数として定義した．ところが，$A \notin \mathcal{F}$ に対し，$\omega \in A$ ならば $X(\omega) = 1$，さもなければ 0 として X を定義すると，$\mathbf{P}(X = 1)$ は定まらない．そこで確率変数を，Ω 上の実数値関数 X で，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して，$\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\}$ が可測となるもの，つまり，

$$\text{任意の } x \in \mathbb{R} \text{ に対して，} \{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F} \text{ となるもの} \qquad \text{(A.2.1)}$$

として定義する．なお，Ω 上の実数値関数が (A.2.1) を満たすとき，**可測** (measurable) であるという[14]．また，確率変数 X に対して，確率 $\mathbf{P}(X \leq x)$ を x に関する関数と見なし，X の**分布関数**[15](distribution function) と呼ぶ[16]．これを $F_X(x)$ と記述する．分布関数は，$\mathbb{R}$ 上に定義された $[0, 1]$ 上に値を取る非減少かつ右連続な関数である．

確率変数 X が高々可算個の値しか取らないとき，分布関数 F_X は階段型になる．このような確率変数を，**離散型確率変数** (discrete random variable) と

[12] $\mathbf{P}$ の定義に $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ が含まれているのだから，$\Omega \in \mathcal{F}$ でないと困る．
[13] A^c は A の補集合である．つまり，$A^c = \Omega \backslash A$ である．
[14] どの σ-加法族について可測であるかをはっきりさせるために，**$\mathcal{F}$-可測** ($\mathcal{F}$-measurable) ということもある．
[15] 累積分布関数ということもある．
[16] A.1.2 節で分布を定義する際には $\mathbf{P}(X = x)$ という確率を考えたが，Ω が大きな集合であるときは X の値域が可算集合とは限らないので，代わりに $\mathbf{P}(X \leq x)$ を考えるのである．

呼ぶ．さらに，値域が $\{k_1, k_2, \dots\}$ である離散型確率変数 X の期待値及び分散は

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} k_i \mathbf{P}(X = k_i), \quad \mathrm{Var}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} (k_i - \mathbf{E}[X])^2 \mathbf{P}(X = k_i)$$

により与えられる．

例 A.5 値域が $\{0, 1, 2, \dots\}$ である確率変数 X の分布が，ある定数 $\lambda > 0$ を用いて

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

と書けるとき，X はパラメータ λ の**ポアソン分布** (Poisson distribution) に従うという．このとき，$\mathbf{E}[X] = \lambda$，$\mathrm{Var}[X] = \lambda$ となる．

また，X は連続的な値を取り，その分布関数 F_X がある非負値関数 f_X を用いて

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

と書けるとき，X を**連続型確率変数** (continuous random variable) といい，f_X を X の**確率密度関数** (probability density function) という[17)]．また，X が連続型であるとき，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $\mathbf{P}(X = x) = 0$ になるが，ラフに言えば，$f_X(x)$ の値は確率 $\mathbf{P}(X = x)$ に相当している．確率密度関数 f_X を持つ確率変数 X の期待値及び分散は

$$\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx, \quad \mathrm{Var}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{E}[X])^2 f_X(x) dx$$

となる．

例 A.6 値域が $[0, \infty)$ である確率変数 X が，確率密度関数

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

を持つとき，X はパラメータ $\alpha > 0$ の**指数分布** (exponential distribution) に従うという．このとき，$\mathbf{E}[X] = 1/\alpha$，$\mathrm{Var}[X] = 1/\alpha^2$ となる．

なお，以下のように分布や確率密度関数を用いずに期待値 $\mathbf{E}[X]$ を定義することもできる:

$$\mathbf{E}[X] := \int_{\Omega} X(\omega) \mathbf{P}(d\omega). \tag{A.2.2}$$

右辺の積分は所謂ルベーグ積分であり，$\int X d\mathbf{P}$ 等と略記することもある．ここでは詳細は述べず直感的な説明のみを与えよう．$d\omega$ は ω を含む小さな可測

[17)] 単に密度関数という場合もある．

集合であると理解すると，$\mathbf{P}(d\omega)$ はラフに言えば $\mathbf{P}(\{\omega\})$ である．従って，この積分は確率変数の値 $X(\omega)$ にその確率 $\mathbf{P}(\{\omega\})$ を掛けて，Ω 上で和を取ったものと解釈できる．もちろん，一点集合 $\{\omega\}$ は可測とは限らないし，可測だとしても $\mathbf{P}(\{\omega\}) = 0$ であるかもしれないので，この議論は数学的には意味をなしていない．ただ，これが確率密度関数を用いた期待値の定義と整合していることは分かるであろう．また，関数 g に対して，$\mathbf{E}[g(X)] = \int g(X)d\mathbf{P}$ であることも分かる．

A.2.3　正規分布

連続型確率変数 X の確率密度関数が，2 つのパラメータ $\mu \in \mathbb{R}$ と $\sigma > 0$ を用いて，

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

と書けるとき，X は平均 μ，分散 σ^2 の**正規分布** (normal distribution) に従うといい[18)]，$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ と記述する．特に，$\mu = 0$，$\sigma = 1$ であるとき，**標準正規分布** (standard normal distribution) という．

ここで $X \sim N(0,1)$ に対して，その期待値と分散を計算しよう．まず，期待値は

$$\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

により与えられるが，被積分関数が奇関数であることから，$\mathbf{E}[X] = 0$ であることが分かる．一方，分散を得るには 2 次モーメント $\mathbf{E}[X^2]$ を計算すれば十分であり，

$$\mathbf{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2\int_{0}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

であることに注意しよう．ここで，

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_0^{\infty} (-x) \frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) dx = \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

が成立する．なお，2 つ目の等号は，部分積分を計算すればよい．最後の積分は**ガウス積分** (Gaussian integral) と呼ばれるもので，重積分を用いた計算により，$\sqrt{\pi/2}$ になることが分かる．以上より，$\mathbf{E}[X^2] = 1$，つまり，$\mathrm{Var}[X] = 1$ を得る．なお，$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ であるとき，

$$Y := \frac{X - \mu}{\sigma}$$

と変換すると，$Y \sim N(0,1)$ であることから，$\mathbf{E}[X] = \mu$，$\mathrm{Var}[X] = \sigma$ を得ることができる．このように，ある確率変数に対して期待値との差を取り，標準偏差で割ったものを**標準化** (standardization) と呼ぶ．

[18)] ガウス分布と呼ぶこともある．

問 A.7 $X \sim N(0,1)$ と $Y \sim N(2,4)$ とする．

1. $\mathbf{E}[X+Y]$ を求めよ．
2. $\mathrm{Var}[X+Y]=7$ であるとき，X と Y の相関係数を求めよ．

A.2.4 特性関数

確率変数 X に対して，実数上の関数

$$\phi_X(\theta) := \mathbf{E}[e^{i\theta X}]$$

を，X の**特性関数** (characteristic function) という．ただし，i は虚数 $\sqrt{-1}$ である．特性関数の導関数を求めると，$\phi'_X(\theta) = \mathbf{E}[iXe^{i\theta X}]$ となることから，$\phi'_X(0) = i\mathbf{E}[X]$ を得る．さらに，$\phi''_X(\theta) = -\mathbf{E}[X^2 e^{i\theta X}]$ であるから，$\phi''_X(0) = -\mathbf{E}[X^2]$ が成立する．一般に，ϕ_X の n 次導関数が求まれば，X の n 次モーメント $\mathbf{E}[X^n]$ を計算することができる．また，2 つの確率変数の特性関数が一致すれば，それらの分布も一致する．

例 A.7 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ であるとき，

$$\phi_X(\theta) = \exp\left\{ i\mu\theta - \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 \right\}$$

である．実際，$\phi'_X(\theta) = (i\mu - \sigma^2\theta)\phi_X(\theta)$ であるから，$\mathbf{E}[X] = -i\phi'(0) = \mu$ を得る．

問 A.8 ポアソン分布及び指数分布の特性関数を求め，1 次及び 2 次モーメントを計算せよ．

A.3 極限定理

A.3.1 確率変数列の収束

「確率変数の列 $X_1, X_2, \ldots$ がある確率変数 X に収束する」とはどういうことであろうか? 確率変数は関数なので，数列の収束とは違い，収束には様々なケースが考えれられる．この小節では，確率変数列 $\{X_n\}_{n=1,2,\ldots}$ と極限となる確率変数 X が同じ確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 上に定義されている場合を考える．

まず，$\{X_n\}$ が X に**各点収束** (pointwise convergence) するとは，任意の $\omega \in \Omega$ に対して，$X_n(\omega)$ が $X(\omega)$ に収束するときにいう．ω を固定してしまえば，列 $\{X_n(\omega)\}$ は実数列になるので，これは ω 毎に実数列として $X(\omega)$ に収束していることを意味している．

ところが，確率論では各点収束が登場することはほとんどない．何故ならば，確率論においては確率 0 の集合は無視しても構わないので，すべての ω

で収束している必要はなく，確率 1 で $X_n(\omega) \to X(\omega)$ となっていれば十分である．より正確に書くならば，

$$\mathbf{P}\left(\left\{\omega \in \Omega | \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1$$

であれば良い．このような収束を**概収束** (almost sure convergence) といい，$X_n \to X$ a.s. と記述する．なお，ω を与える毎に定まる命題 $A(\omega)$ に対して，$\mathbf{P}(\{\omega \in \Omega | A(\omega) \text{ が成立 }\}) = 1$ であるとき，$A(\omega)$ は **ほとんど確実に** (almost surely) 成立するといい，$A(\omega)$ a.s. と記述する．例えば，確率変数 X に対して，「$X \geq 0$ a.s.」とあれば，これは $\mathbf{P}(X \geq 0) = 1$ を意味している．ただし，$X(\omega) < 0$ となる ω も存在しているかもしれないことに注意しよう．

次に，$\{X_n\}$ が X に**確率収束** (convergence in probability) するとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$$

が成り立つときにいい，$X_n \to X$ in prob. と記述する．確率収束は概収束をほんの少し緩めた概念である．実際，概収束していれば確率収束している．ただし，逆は必ずしも成り立つとは限らない．概収束の定義と比べると確率収束の定義は分かりにくいが，それとは逆に，与えられた確率変数列が概収束していることの証明は難しい場合が多いが，確率収束であれば比較的容易に示せるのである．この意味で，確率収束は大事な概念である．

4 つ目の収束概念を紹介しよう．$p \geq 1$ に対して，$\{X_n\}$ が X に p **次平均収束** (convergence in the p-mean) するとは，

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[|X_n - X|^p] = 0$$

であるときにいう．p 次平均収束しているとき確率収束していることは，以下の確率変数 X に関する不等式からすぐに分かる:

命題 A.8 (チェビシェフの不等式 (Chebyshev's inequality)) 任意の $p \geq 1$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して，以下の不等式が成り立つ:

$$\mathbf{P}(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{E}[|X|^p]}{\varepsilon^p}.$$

証明. まず，任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して，

$$\mathbf{1}_A(\omega) := \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A, \end{cases}$$

と定義する．これは**定義関数** (indicator function) と呼ばれる確率変数であり[19)]，

$$\mathbf{E}[\mathbf{1}_A] = \int_\Omega \mathbf{1}_A d\mathbf{P} = \int_A d\mathbf{P} = \mathbf{P}(A)$$

[19)] 定義関数は非常に重要な概念である．

を満たす．従って，$\mathbf{1}_{\{|X|\geq\varepsilon\}} \leq \dfrac{|X|^p}{\varepsilon^p}$ に注意すると，

$$\mathbf{P}(|X| \geq \varepsilon) = \mathbf{E}[\mathbf{1}_{\{|X|\geq\varepsilon\}}] \leq \frac{\mathbf{E}[|X|^p]}{\varepsilon^p}$$

が成立する． □

問 A.9 それぞれ X，Y に 1 次平均収束する 2 つの確率変数列 $\{X_n\}$，$\{Y_n\}$ に対して，$\{X_n + Y_n\}$ は $X + Y$ に 1 次平均収束することを示せ．

A.3.2 大数の法則

確率論における代表的な極限定理として，ここでは**大数の法則** (law of large numbers) を紹介する．公正なコインを繰り返し投げるとき，表が出る割合は 1/2 に近づく．このことを数学的に述べた定理が大数の法則である．より具体的には，確率変数列 $\{X_k\}_{k=1,2,\ldots}$ に対して，最初の n 個の標本平均 $\overline{X}_n := \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ が，標本平均の期待値 $\overline{\mu}_n := \mathbf{E}[\overline{X}_n] = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}[X_k]$ に収束すること，つまり，$\lim_{n\to\infty} (\overline{X}_n - \overline{\mu}_n) = 0$ であることを主張する定理である．これには，収束が確率収束である場合の**弱法則** (weak law) と，概収束である**強法則** (strong law) の 2 種類がある．また，大数の法則が成立するためには，確率変数列 $\{X_k\}$ が i.i.d. で高次のモーメントを持つことが要求されるが，これらの条件をできる限り緩めようとする努力が長年行われてきた．つまり，大数の法則と一口に言っても，様々なバリエーションがあることに注意して欲しい．

まず標準的な大数の弱法則を紹介する．

定理 A.9 (大数の弱法則) 確率変数列 $\{X_k\}_{k=1,2,\ldots}$ は，組ごとに独立，つまり，$i \neq j$ ならば X_i と X_j は独立であるとする．各 k に対して，$\mu_k := \mathbf{E}[X_k]$，$\sigma_k^2 := \mathrm{Var}[X_k]$ とし，

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k, \quad \overline{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mu_k \tag{A.3.1}$$

とおく．$\sup_{k\geq 1} \sigma_k^2 < \infty$ であるならば，$\overline{X}_n - \overline{\mu}_n \to 0$ in prob. が成立する．

証明. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\mathbf{P}(|\overline{X}_n - \overline{\mu}_n| \geq \varepsilon)$ が 0 に収束することを示せば良い．しかし，これは以下の計算より得られる:

$$\mathbf{P}(|\overline{X}_n - \overline{\mu}_n| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbf{E}[|\overline{X}_n - \overline{\mu}_n|^2] = \frac{1}{\varepsilon^2 n^2}\mathbf{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mu_k)\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2 n^2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}[(X_k - \mu_k)(X_j - \mu_j)]$$
$$= \frac{1}{\varepsilon^2 n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}[(X_k - \mu_k)^2] = \frac{1}{\varepsilon^2 n^2} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$$
$$\leq \frac{n}{\varepsilon^2 n^2} \sup_{k \geq 1} \sigma_k^2 = \frac{1}{\varepsilon^2 n} \sup_{k \geq 1} \sigma_k^2 \to 0.$$

最初の不等号はチェビシェフの不等式による．3 つ目の等号は，組ごとの独立性より，$k \neq j$ ならば $\mathbf{E}[(X_k - \mu_k)(X_j - \mu_j)] = \mathbf{E}[X_k - \mu_k]\mathbf{E}[X_j - \mu_j] = 0$ であることから得られる． □

ここで紹介した大数の弱法則では，確率変数列 $\{X_k\}$ について同分布であることは仮定していない．また，独立性も組ごとの独立性まで緩めている．さらに，モーメントに関する条件は，分散 σ_k^2 が $k \to \infty$ で無限大に発散しないことだけを要求している[20)]．このように条件を緩めたにもかかわらず，証明はシンプルであり，基本的にはチェビシェフの不等式しか用いていない．これは確率収束だからであり，次に述べる強法則では概収束を主張しているため，確率変数列に関して強い条件を課しているにもかかわらず，証明はずっと複雑なものになる[21)]．

定理 A.10 (大数の強法則) 確率変数列 $\{X_k\}_{k=1,2,\ldots}$ は，i.i.d. であり，$\mu := \mathbf{E}[X_1]$ とおく．このとき，$\mathbf{E}[X_1^4] < \infty$ であるならば，$\overline{X}_n \to \mu$ a.s. が成立する．ただし，$\overline{X}_n$ は (A.3.1) で定義されたものである．

A.3.3 分布収束と中心極限定理

この小節では，大数の法則に並び重要な極限定理である**中心極限定理** (central limit theorem) を紹介する．中心極限定理は，確率変数の和を標準化したものは正規分布に収束することを主張する．そこで，5 つ目の確率変数列の収束概念である**分布収束** (convergence in distribution) を定義することから始めよう．

確率変数列 $\{X_n\}_{n=1,2,\ldots}$ に対して，各 X_n の分布関数を F_n とする．$\{X_n\}$ が，ある確率変数 X に分布収束するとは，X の分布関数 F_X の任意の連続点 x に対して，$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F_X(x)$ が成り立つときにいい，これを $X_n \xrightarrow{D} X$ と書く[22)]．なお，分布収束を議論するときは，$\{X_n\}$ や X は必ずしも同じ確率空間上に定義されている必要はない．また，$X_n \xrightarrow{D} X$ であることと，任

[20)] より正確には，分散が無限大に発散する部分列が存在しない．

[21)] ここでは定理 A.10 の証明は紹介しない．例えば，[9, ツァピンスキ] 定理 8.29 等を参照のこと．

[22)] 分布収束のことを**法則収束** (convergence in law) ということもある．また，$X_n \xrightarrow{D} X$ を対応する分布関数列 $\{F_n\}$ の F_X への収束と見なし，これを**弱収束** (weak convergence) と呼ぶこともある．

意の連続有界関数 f に対して，$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[f(X_n)] = \mathbf{E}[f(X)]$ が成り立つことは同値である．

ここで，証明は与えないが，分布収束に関する基本性質をいくつか紹介しよう．ただし，ϕ_n 及び ϕ_X をそれぞれ X_n 及び X の特性関数とする．

1. $\{X_n\}$ と X が同じ確率空間上に定義されているとき，$X_n \to X$ in prob. であれば $X_n \xrightarrow{D} X$ である．
2. $X_n \xrightarrow{D} X$ であることと，任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して $\phi_n(\theta) \to \phi_X(\theta)$ であることは同値である．

いよいよ中心極限定理を述べよう．中心極限定理も大数の法則と同様に様々なバリエーションがあるが，ここでは最も標準的なものを紹介する．

定理 A.11 (中心極限定理) $\{X_n\}_{n=1,2,\dots}$ を，i.i.d. 確率変数列，Z を標準正規分布に従う確率変数とし，$\mu := \mathbf{E}[X_1]$, $\sigma^2 := \mathrm{Var}[X_1]$ とおく．このとき，

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{D} Z$$

が成立する．

証明. まず，各 $n, k = 1, 2, \dots$ に対して，

$$S_n := \frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}, \quad Y_k := \frac{X_k - \mu}{\sigma}$$

とおく．Y_k は X_k の標準化であり，$\mathbf{E}\left[\sum_{k=1}^n X_k\right] = n\mu$，$\mathrm{Var}\left[\sum_{k=1}^n X_k\right] = n\sigma^2$ であることに注意すると，S_n は $\sum_{k=1}^n X_k$ の標準化である．確率変数列 $\{Y_k\}$ は i.i.d. であり，各 Y_k の特性関数を ϕ_Y とする．S_n の特性関数 ϕ_{S_n} は，

$$\begin{aligned}\phi_{S_n}(\theta) &= \mathbf{E}\left[e^{i\theta S_n}\right] = \mathbf{E}\left[\exp\left\{\frac{i\theta}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n Y_k\right\}\right] \\ &= \prod_{k=1}^n \mathbf{E}\left[\exp\left\{\frac{i\theta Y_k}{\sqrt{n}}\right\}\right] = \left(\phi_Y\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right)\right)^n\end{aligned}$$

となる．ここで，Y_k が 2 次モーメントを持つことから，ϕ_Y が 2 回連続微分可能[23]であることが分かる[24]．従って，テイラーの定理[25]より，$|u_\theta| \le \dfrac{\theta}{\sqrt{n}}$ を満たす u_θ が存在し，

$$\phi_Y\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}}\right) = \phi_Y(0) + \frac{\theta}{\sqrt{n}}\phi_Y'(0) + \frac{\theta^2}{2n}\phi_Y''(u_\theta)$$

[23] このような関数を C^2-級という．つまり，ϕ_Y は 2 回微分可能で，ϕ_Y'' も連続である．
[24] これを示すためにはルベーグ積分の知識が必要なので，ここでは省略する．
[25] 必要ならば，微分積分の教科書を当たること．

を満たす．よって，

$$\begin{aligned}\log \phi_{S_n}(\theta) &= n \log \left(\phi_Y \left(\frac{\theta}{\sqrt{n}} \right) \right) \\ &= n \log \left(\phi_Y(0) + \frac{\theta}{\sqrt{n}} \phi_Y'(0) + \frac{\theta^2}{2n} \phi_Y''(u_\theta) \right) \\ &= n \log \left(1 + \frac{\theta}{\sqrt{n}} i\mathbf{E}[Y] + \frac{\theta^2}{2n} \phi_Y''(u_\theta) \right) \\ &= n \log \left(1 + \frac{\theta^2}{2n} \phi_Y''(u_\theta) \right) = n \left(\frac{\theta^2}{2n} \phi_Y''(u_\theta) + o\left(\frac{1}{n} \right) \right)\end{aligned}$$

が成立する．ここでは，特性関数についての一般的な性質である $\phi_Y(0) = 1$ 及び $\phi_Y'(0) = i\mathbf{E}[Y_k]$ と，$\mathbf{E}[Y_k] = 0$ を用いた．さらに $o(1/n)$ とは，$n \to \infty$ としたとき，$1/n$ よりも速く 0 に収束する項である．つまり，$no(1/n)$ は $n \to \infty$ としたとき 0 に収束する．なお，最後の等号は，$|a|$ が十分小さいとき，$\log(1+a) = a + o(|a|)$ であることから得られる．以上より，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \log \phi_{S_n}(\theta) &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\theta^2}{2} \phi_Y''(u_\theta) + no\left(\frac{1}{n} \right) \right) \\ &= \frac{\theta^2}{2} \phi_Y''(0) = -\frac{\theta^2}{2} \mathbf{E}[Y^2] = -\frac{\theta^2}{2}\end{aligned}$$

を得る．ここで，$n \to \infty$ であるとき，$u_\theta \to 0$ であることと，ϕ_Y'' の連続性を用いた．これより，$\phi_{S_n}(\theta)$ が標準正規分布の特性関数に収束していることを示している．従って，定理 A.11 が成り立つ． □

A.4 ランダムウォークと Brown 運動

4.1.1 節では，ランダムウォークの極限として Brown 運動を導くことで BS モデルを導出している．そこでこの節では，ランダムウォークと Brown 運動を定義し，中心極限定理を用いて Brown 運動が得られることを示す．

A.4.1 ランダムウォーク

$\{X_n\}_{n=1,2,\dots}$ を i.i.d. 確率変数列とし，各 $n = 1, 2, \dots$ に対して

$$S_n := S_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k$$

と定義する．ただし，S_0 は定数とする．このとき，確率変数列 $\{S_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ を**ランダムウォーク** (random walk) という．特に，$S_0 = 0$ で，X_n の値域が $\{-1, 1\}$ であるとき，ランダムウォーク $\{S_n\}$ を**単純** (simple) という．なお，$\{S_n\}$ が $\mathbf{P}(X_n = 1) = p$ である単純ランダムウォークであるとき，

$$\mathbf{E}[S_n] = (2p-1)n, \quad \mathrm{Var}[S_n] = 4p(1-p)n$$

が成立する．さらに，単純ランダムウォークが**対称** (symmetric) であるとは，$\mathbf{P}(X_n = 1) = 1/2$ であるときにいう．ランダムウォーク $\{S_n\}$ は以下の 2 つの性質を持つ:

1. **独立増分性** (independent increment): 任意の $k \in \mathbb{N}$ と任意の $0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_k$ に対して，$S_{n_1} - S_{n_0}, S_{n_2} - S_{n_1}, \ldots, S_{n_k} - S_{n_{k-1}}$ は互いに独立である．
2. **定常増分性** (stationary increment): 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，確率変数列 $\{S_{k+n} - S_k\}_{k=0,1,2,\ldots}$ は同分布を持つ．

問 A.10 $\{S_n\}$ を対称単純ランダムウォークとする．$\mathbf{P}(S_{99} = 0)$ の値を求めよ．さらに，

$$\mathbf{E}\left[e^{\theta S_n}\right] = \left(\frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}\right)^n, \ \theta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N},$$

を証明せよ．

A.4.2 Brown 運動

次に，連続時間型確率過程 $\{W_t\}_{t\geq 0}$ が**標準 Brown 運動**[26] (standard Brownian motion) であるとは，以下の条件を満たすときにいう:

1. $W_0 = 0$ a.s.，つまり，$\mathbf{P}(W_0 = 0) = 1$.
2. ほとんどすべての $\omega \in \Omega$ に対して，$W_t(\omega)$ は t の関数として連続である[27].
3. $\{W_t\}$ は独立増分をもつ．
4. 任意の $t > 0$，$s \geq 0$ に対して，$W_{t+s} - W_s \sim N(0, t)$ である．つまり，$\{W_t\}$ は定常増分を持つ．

問 A.11 標準 Brown 運動 $\{W_t\}$ に対して，$\mathbf{P}(W_t > 0)$，$\mathbf{E}[e^{2W_t}]$，$\mathbf{E}[W_t^3] = 0$ の値を求めよ．

例 A.12 $\mathbf{E}[W_t W_s] = t \wedge s$ となることを示そう[28]．$t \geq s$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[W_t W_s] &= \mathbf{E}[(W_t - W_s)W_s + W_s^2] = \mathbf{E}[(W_t - W_s)(W_s - W_0)] + \mathbf{E}[W_s^2] \\ &= \mathbf{E}[W_t - W_s]\mathbf{E}[W_s - W_0] + s = s\end{aligned}$$

が成立する．3 つ目の等号は，独立増分性と $W_s \sim N(0, s)$ を用いた．最後は，定常増分性から $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$ が成り立つことによる．

$\sigma > 0$，$\mu \in \mathbb{R}$ に対して，$W_t^{\sigma,\mu} := \sigma W_t + \mu t$ と記述し，確率過程 $\{W_t^{\sigma,\mu}\}_{t\geq 0}$ を**ドリフト付き Brown 運動** (Brownian motion with drift) という．任意の $t > 0$ に対して，$W_t^{\sigma,\mu} \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$ である．なお，σ を**拡散係数** (diffusion coefficient)，μ を**ドリフト係数** (drift coefficient) という．

---

[26] 単に Brown 運動と呼ぶこともある．

[27] より正確には，$\mathbf{P}(\{\omega \in \Omega \mid W_t(\omega) \text{ は } t \text{ の関数として連続}) = 1$ が成り立つ．なお，雑に言えば，Brown 運動など連続時間型確率過程を考える際は，ω を 1 つ取ることは，確率過程の標本路を 1 つ取ることである．

[28] $t \wedge s = \min\{t, s\}$.

A.4.3　ランダムウォークから Brown 運動へ

自然数 n を固定し，確率変数列 $\{X_k^{(n)}\}_{k=1,2,\dots}$ を，i.i.d. で，各 $X_k^{(n)}$ の分布が

$$\mathbf{P}(X_k^{(n)} = u^{(n)}) = \mathbf{P}(X_k^{(n)} = -u^{(n)}) = \frac{1}{2}$$

で与えられるものとする．ただし，$u^{(n)} > 0$ である．さらに，$k = 1, 2, \dots$ に対して，

$$S_{j/n}^{(n)} := \sum_{k=1}^{j} X_k^{(n)}$$

と定義する．$\{S_t^{(n)}\}$ は，時間パラメータが $1/n, 2/n, \dots, j/n, \dots$ である離散時間型確率過程であり，対称なランダムウォークになっている．まず，$u^{(n)} := 1/n$ とする．このとき，$\{S_{j/n}^{(n)}\}$ は対称単純ランダムウォークを $1/n$ 倍したものに相当する．言い換えれば，歩幅と時間間隔が共に $1/n$ である対称単純ランダムウォークである．ここで，$X_k := nX_k^{(n)}$ とおくと，これは i.i.d. 確率変数列を構成し，その分布は $\mathbf{P}(X_k = 1) = \mathbf{P}(X_k = -1) = 1/2$ となる．よって，

$$S_1^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

であるから，大数の法則 (定理 A.10) より，$n \to \infty$ のとき $S_1^{(n)}$ は 0 に概収束する．つまり，極限を取ると潰れてしまう．そこで，今度は $u^{(n)} = 1/\sqrt{n}$ とすると，$\{S_t^{(n)}\}$ は歩幅 $1/\sqrt{n}$ 倍，時間間隔 $1/n$ 倍の対称単純ランダムウォークに相当し，

$$S_1^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

を満たす．ただし，$\{X_k\}$ は $\mathbf{P}(X_k = 1) = \mathbf{P}(X_k = -1) = 1/2$ である i.i.d. 確率変数列である．このとき，$\mathbf{E}[X_k] = 0$, $\mathrm{Var}[X_k] = 1$ であるから，中心極限定理 (定理 A.11) より，$n \to \infty$ のとき $S_1^{(n)}$ は標準正規分布に分布収束する．つまり，ランダムウォークの時間間隔の刻み幅を小さくして連続時間型確率過程を導出するためには，ランダムウォークの歩幅のスケーリングを適切に取る必要がある．

以上を踏まえて，ドリフト付き Brown 運動 $\{W_t^{\sigma,\mu}\}$ をランダムウォークの極限として導出してみよう．$t > 0$ を 1 つ固定し，時間区間 $[0, t]$ を n 等分する．ここで，$u_t^{(n)} := \sigma\sqrt{\dfrac{t}{n}}$ とおき，i.i.d. 確率変数列 $\{X_k^{(n)}\}_{k=1,2,\dots}$ を，分布が

$$\mathbf{P}\left(X_k^{(n)} = \pm u_t^{(n)}\right) = \frac{1}{2} \pm \frac{\mu}{2\sigma^2} u_t^{(n)} = \frac{1}{2} \pm \frac{\mu}{2\sigma}\sqrt{\frac{t}{n}}$$

であるものとする．まず，

$$\mathbf{E}\left[X_1^{(n)}\right] = u_t^{(n)} \left(\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2\sigma}\sqrt{\frac{t}{n}}\right) - u_t^{(n)} \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{2\sigma}\sqrt{\frac{t}{n}}\right) = \frac{\mu t}{n},$$

$$\mathbf{E}\left[\left(X_1^{(n)}\right)^2\right] = \left(u_t^{(n)}\right)^2,$$

$$\mathrm{Var}\left[X_1^{(n)}\right] = \left(u_t^{(n)}\right)^2 - \left(\mathbf{E}\left[X_k^{(n)}\right]\right)^2 = \sigma^2\frac{t}{n} - \frac{\mu^2t^2}{n^2}$$

である．ここで，$j = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，

$$S^{(n)}_{\frac{tj}{n}} := \sum_{k=1}^{j} X_k^{(n)}$$

と定義する．これはランダムウォークである．特に，$j = n$ とすれば，$S_t^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} X_k^{(n)}$ となる．このとき，

$$\frac{S_t^{(n)} - n\mathbf{E}\left[X_1^{(n)}\right]}{\sqrt{n\,\mathrm{Var}\left[X_1^{(n)}\right]}} = \frac{S_t^{(n)} - \mu t}{\sqrt{\sigma^2 t - \frac{\mu^2t^2}{n}}} \tag{A.4.1}$$

であり，定理 A.11 より，この右辺は $n \to \infty$ のとき標準正規分布に分布収束する．さらに，n が十分大きければ (A.4.1) の分母は $\sigma\sqrt{t}$ に近くなるので，$S_t^{(n)}$ は平均 μt，分散 $\sigma^2 t$ の正規分布に分布収束する．ここで示したことは各 $t > 0$ に対して成立するので，ドリフト付き Brown 運動 $\{W_t^{\sigma,\mu}\}$ が導出される[29)]．

補遺:A　章末問題

A-1　$P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$, $P(A \cup B) = 0.7$ であるとき，$P(A \cap B)$ を求めよ．

A-2　1% の人が罹っている病気を考える．この病気に罹っているかどうかの検査を行うと，病気に罹っている人は必ず陽性反応が出るが，病気でない人でも 10% の人に陽性反応が出る．もし陽性反応が出たときに，本当に病気である確率を計算せよ．

A-3　確率変数 X がパラメーター α の指数分布に従うとき，任意の $s, t \geq 0$ に対して

$$\mathbf{P}(X > s + t | X > t) = \mathbf{P}(X > s)$$

が成立することを示せ[30)]．

[29)] 各 $t \in [0, T]$ に対して $S_t^{(n)}$ が $W_t^{\sigma,\mu}$ に分布収束することと，$\{S_t^{(n)}\}$ が $\{W_t^{\sigma,\mu}\}$ に確率過程として収束することは，数学的にはギャップがある．しかし，ここでは確率過程の収束についてこれ以上立ち入らないことにする．

[30)] 指数分布のこの性質を**無記憶性** (memorylessness) という．これは，X が交通事故の発生時刻など，ある事象が発生する時刻を表しているとき，事象が発生するまでの時間は過去の経過に依らないことを示している．

A-4 確率変数列 $\{X_n\}$ は，i.i.d. であり，その分布は $\mathbf{P}(X_1 = 1) = p$, $\mathbf{P}(X_1 = 0) = q$ で与えられているものとする．ただし，$0 < p < 1$, $p + q = 1$ である．また，$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ と定義する．以下の問いに答えよ．

1. S_n の期待値と分散を求めよ．
2. $\dfrac{S_n}{n}$ はある実数 α に概収束する．α を求めよ．
3. 任意の実数 a, b $(a < b)$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) = \int_a^b f(x)dx \tag{A.4.2}$$

が成立しているとする．関数 f を求めよ．

補遺 B:　章末問題の解答

第 1 章　章末問題の解答 (問題は 15 ページに掲載)

1-1　1. $\frac{RF}{2}$, 2. $P = \dfrac{RF}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{2n-1}\left(1+\frac{y}{2}\right)^{-k} + \left(F+\frac{RF}{2}\right)\left(1+\frac{y}{2}\right)^{-2n}$, 3. 2. の解答の y に R を代入し，右辺の値が F と等しいことを確認すればよい.

1-2　1. $\frac{RF}{m}$, 2. $P = \dfrac{RF}{m}\displaystyle\sum_{k=1}^{mn-1}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-k} + \left(F+\frac{RF}{m}\right)\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-mn}$,
3. $P = \dfrac{RF}{m}\displaystyle\sum_{k=1}^{mn-1}\exp\left\{-r\frac{k}{m}\right\} + \left(F+\frac{RF}{m}\right)e^{-rn}$.

1-3　n 年で 2 倍になるとしよう．金利を r，元本を簡単のため 1 円とすれば，$(1+r)^n = 2$ が成立する．両辺，自然対数を取り，$r = 0.05$ を代入すると，$n\log 1.05 = \log 2$ となる．近似を用いれば，$0.05n \approx 0.7$，つまり，約 14 年である．

1-4　時刻 0 で S_0 円借金をして，原資産 1 単位を購入する．同時に先渡契約を売り建てると，時刻 0 におけるキャッシュフローは 0 である．また，時刻 T において，先渡し契約により原資産を F 円で売却し，借金を返済する．このときの返済額は S_0e^{rT} であるから，時刻 T におけるキャッシュフローは $F - S_0e^{rT}$ であり，これは正だから裁定機会である．

第 2 章　章末問題の解答 (問題は 38 ページに掲載)

2-1　1. 第一基本定理より，マルチンゲール確率が存在することを示せば十分である．つまり，任意の $S_U > 1000$ に対して，方程式 $qS_U + 900(1-q) = 1000$ が解 $q \in (0,1)$ を持てばよい．実際，この方程式の解は $q = \dfrac{100}{S_U - 900}$ であり，これは正で $\dfrac{100}{1000-900} = 1$ より小さい.
2. 時刻 0 で危険資産 1 単位を空売りし，1000 円を貸し出す．満期 T において，貸し出した 1000 円を返却してもらい，空売りを精算する．その結果，T におけるキャッシュフローは 0 または 100 となる.
3. $\mathbf{Q}(S_T = 1050) = \frac{2}{3}$, $\mathbf{Q}(S_T = 900) = \frac{1}{3}$.　4. $\alpha = -420$, $\beta = \frac{7}{15}$, $C_0 = \frac{140}{3}$.
5. 10.

2-2 1. $0.05 < r < 0.2$. 2. $\mathbf{Q}(S_T = 108) = \frac{1}{3}$, $\mathbf{Q}(S_T = 94.5) = \frac{2}{3}$.
3. $\alpha = -\frac{560}{11}$, $\beta = \frac{16}{27}$, $C_0 = \frac{80}{33}$. 4. $\frac{50}{11}$.

2-3 1. マルチンゲール確率が存在することを示せば良い．2. マルチンゲール確率が複数存在することを示すか，複製可能でないオプションを例示すればよい．例えば，ペイオフが $S_T = 120$ となるときのみ 120 で，それ以外は 0 となるオプションなど．3. $\mathbf{Q}$ をマルチンゲール確率とし，$q_u := \mathbf{Q}(S_T = 120)$, $q_m := \mathbf{Q}(S_T = 90)$ and $q_d := \mathbf{Q}(S_T = 80)$ とおく．ただし，$\mathbf{Q}$ とベクトル (q_u, q_m, q_d) を同一視することとする．このとき，マルチンゲール確率の全体は

$$\left\{ (q_u, q_m, q_d) \;\middle|\; \frac{1}{3} < q_u < \frac{1}{2}, 4q_u + q_m = 2, q_u + q_m + q_d = 1 \right\}$$

と記述される． 4. $\alpha = -70$, $\beta = \dfrac{7}{8}$.

2-4 1.-3. 第一及び第二基本定理より，方程式 $D\mathbf{q} = \mathbf{S}_0$ が唯一つの解を持ち，それが正であることを確認すれば十分である．ただし，$\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^\top$ とする．簡単な計算より，$\mathbf{q} = (1/3, 1/3, 1/3)^\top$ が一意解であることが分かる．よって，市場は無裁定かつ完備である．マルチンゲール確率 $\mathbf{Q}$ は $\mathbf{Q}(\{\omega_j\}) = 1/3,\ j = 1, 2, 3$ より与えられる．
4. 複製ポートフォリオ $\mathbf{x}$ は方程式 $\mathbf{x}D = \mathbf{C}$ の解であり，これを解けば $\mathbf{x} = (-10/9, 0, 1/9)$ を得る．一方，オプション $\mathbf{C}$ の価格 C_0 は，$C_0 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{S}_0$ または $C_0 = \mathbf{E}_\mathbf{Q}[\mathbf{C}] = \mathbf{q} \cdot \mathbf{C}$ より与えられ，$C_0 = 10/3$ となる．

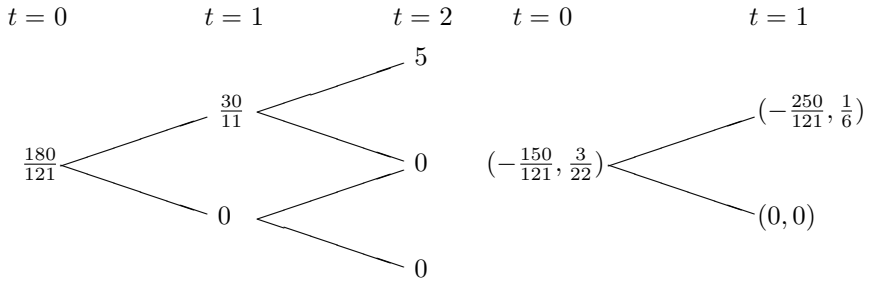
2-5 1.-2. $\widehat{D} = \frac{1}{1.1} D$，$\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^\top$ として $\widehat{D}\mathbf{q} = \mathbf{S}_0$ を解くと，解は $a \in (0, 1)$ を用いて $\mathbf{q} = \left(\frac{2}{3}(1-a), a, \frac{1}{3}(1-a)\right)^\top$ と記述される．つまり，方程式 $\widehat{D}\mathbf{q} = \mathbf{S}_0$ は無限に多くの正値解 $\mathbf{q}$ を持つ．これは行列式 $\det \widehat{D}$ が 0 であることからも分かる．言い換えれば，このモデルは無裁定であるが，完備ではない．

2-6 $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)^\top$ を方程式 $D\mathbf{q} = \mathbf{S}_0$ の解とすると，$u > 0$ の値に関わらず，$q_1 + q_2 = 1/2$，$q_3 + q_4 = 1/2$，$q_2 + (9-u)q_3 = 6 - \frac{u}{2}$ となる．
1. $u = 12$ であるとき，$\mathbf{q}$ が $D\mathbf{q} = \mathbf{S}_0$ の解であることと， $q_1 + q_2 = 1/2$, $q_3 + q_4 = 1/2$ 及び $q_2 - 3q_3 = 0$ が成り立つことは同値である．従って，無限に多くの正値解が存在する．よって，無裁定かつ非完備である．
2. $u = 11$ であるとき，$q_2 - 2q_3 = 1/2$，つまり，$-2q_3 = q_1$ が成り立つ．よって，正値解はなく，無裁定条件は満たされない．
ここで，$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ を裁定機会とする．つまり，$\mathbf{x} \cdot \mathbf{S}_0 = 0$ であり，$\mathbf{x}D$ は非負ベクトルで少なくとも 1 つは正の成分を持つ．今，$\mathbf{x}D = (-2x_2 - 2x_3, -x_2 - 2x_3, -x_2 + 2x_3, x_2 + 2x_3)^\top$ が成り立つ．$\mathbf{x}D$ は非負だから，$x_2 + 2x_3 = 0$ となり，$\mathbf{x}D = (2x_3, 0, 4x_3, 0)^\top$ を得る．これより $x_3 > 0$ を得る．そこで，$x_3 = 1$

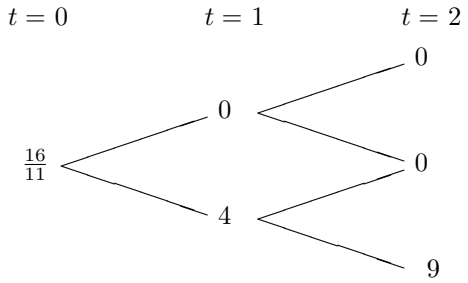
とすると，$\mathbf{x} = (8, -2, 1)$ であり，これは裁定機会である．
3. 線形写像 g を $g(\mathbf{y}) := D\mathbf{y}$ により定義する．ここで $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^\top$ とする．第二基本定理の証明より，市場が完備であることと，$\mathrm{Ker}(g) = \{\mathbf{0}\}$ であることは同値である．ここで，$\mathbf{y} \in \mathrm{Ker}(g) \iff D\mathbf{y} = \mathbf{0} \iff$ “$y_1 + y_2 = 0$, $y_3 + y_4 = 0$ かつ $y_2 + (u-9)y_4 = 0$”であるから，$\mathrm{Ker}(g) = \{((u-9)a, -(u-9)a, -a, a)^\top | a \in \mathbb{R}\}$ が成り立つ．よって，任意の $u > 0$ に対して，市場モデルは完備ではない．

第 3 章　章末問題の解答 (問題は 57 ページに掲載)

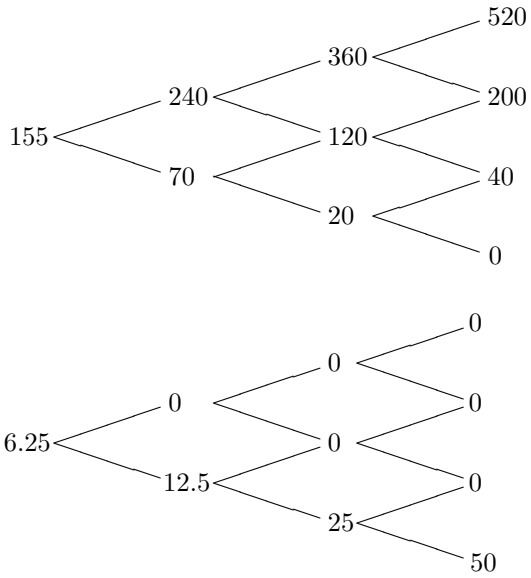
3-1　1. $\mathbf{Q}(S_1 = 30) = 3/5$, $\mathbf{Q}(S_1 = 10) = 2/5$; $\mathbf{Q}(S_2 = 45) = 9/25$, $\mathbf{Q}(S_2 = 15) = 12/25$, $\mathbf{Q}(S_2 = 5) = 4/25$, 2. 左側の図がオプション価格，右側が複製戦略を表している．なお，右図における (a, b) は，a 単位の安全資産と b 単位の危険資産から成るポートフォリオを表している．



3. オプション価格は以下のとおりである。なお，$S_1 = 10$ であるとき早期行使が発生する．



3-2 1. $\mathbf{Q}(S_3 = 320) = 3/8$, 2. 及び 3. は下図のとおりである．4. 早期行使は起こらない．



3-3 まず，左側の不等号を示す．背理法を用いるので，

$$C_0 - P_0 - S_0 + K(1+r)^{-T} > 0 \tag{B.0.1}$$

が成立しているとき，裁定機会が存在することを示す．以下の戦略を考える:

	$t=0$	Cashflow	$t=u$	Cashflow	$t=T$	
コール	売却	C_0	行使[1)]	$-(S_u-K)$		
プット	購入	$-P_0$			行使	$(K-S_T)^+$
危険資産	購入	$-S_0$	売却	S_u		
安全資産	貸付	$-C_0+P_0+S_0$	貸付	$-K$	下記参照	
合計		0		0		>0

満期において，投資家は $(C_0 - P_0 - S_0)(1+r)^T + K(1+r)^{T-u}$ を受け取る．(B.0.1) より，この値は $-K + K(1+r)^{T-u}$ より大きいため非負である．結局，これは裁定機会である．従って，(B.0.1) は成立しない．

次に，2 つ目の不等号を同様の議論により示す．よって，

$$-C_0 + P_0 + S_0 - K > 0 \tag{B.0.2}$$

を仮定し，以下のように裁定機会を構成する:

[1)] 時刻 u においてコールオプションの買い手が行使するものとする．このとき，$S_u - K \geq 0$ であると仮定して良い．

	$t=0$	Cashflow	$t=u$	Cashflow	$t=T$	Cashflow
コール	購入	$-C_0$			行使	$(S_T-K)^+$
プット	売却	P_0	行使[2)]	$-(K-S_u)$		
危険資産	空売り	S_0	精算	$-S_u$		
安全資産	貸付	$C_0-P_0-S_0$	借入	K	下記参照	
合計		0		0		>0

満期において，投資家は $(-C_0+P_0+S_0)(1+r)^T-K(1+r)^{T-u}$ を受け取る．(B.0.2) の下，これは $K(1+r)^T-K(1+r)^{T-u}\geq 0$ より大きく，上記の戦略は裁定機会であることが分かる．つまり，(B.0.2) は成立しない．

3-4 K を行使価格とする．まず，$t=0,\dots,T-1$ に対して

$$P_t^A=\max\{(K-S_t)^+,\mathbf{E_Q}[P_{t+1}^A|S_t]\}$$

が成り立つので，(t をずらして)$P_{t+1}^A\geq(K-S_{t+1})^+$ を得る．一方，関数 $f(x)=(K-x)^+$ は凸なので，Jensen の不等式 (補題 3.6) より

$$\mathbf{E_Q}[(K-S_{t+1})^+|S_t]\geq(K-\mathbf{E_Q}[S_{t+1}|S_t])^+=(K-S_t)^+$$

が任意の $t=0,\dots,T-1$ に対して成立する．よって，

$$\mathbf{E_Q}[P_{t+1}^A|S_t]\geq\mathbf{E_Q}[(K-S_{t+1})^+|S_t]\geq(K-S_t)^+$$

が成立し，早期行使は発生しない．ただし，等式 $(K-S_t)^+=\mathbf{E_Q}[P_{t+1}^A|S_t]$ が成立している可能性はあり，この場合には早期行使を行っても行わなくても違いは生じない．

第 4 章　章末問題の解答 (問題は 79 ページに掲載)

4-1 ある時刻 t において $C(t,S_t)-P(t,S_t)>S_t-e^{-r(T-t)}K$ が成立していると仮定する．このとき，時刻 t まで何もせず，t でコール 1 単位を売却し，プットと危険資産を 1 単位ずつ購入し，安全資産を $C(t,S_t)-P(t,S_t)-S_t$ だけ売却する戦略を考える．この戦略の時刻 t におけるキャッシュフローは 0 であり，T におけるキャッシュフローは

$$-(S_T-K)^++(K-S_T)^++S_T+(C(t,S_t)-P(t,S_t)-S_t)e^{r(T-t)}>K-K=0$$

となる．よって，この戦略は裁定機会である．反対の不等号が成立している場合も同様である．

[2)] 時刻 u においてプットオプションの買い手が行使するものとする．このとき，$K-S_u\geq 0$ であると仮定して良い．

4-2 1. A.2.3 節より $f_N(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ である．よって，定理 4.6 にある $d_\pm$ の定義より，

$$f_N(d_+) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_+^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(d_- + \sigma\sqrt{\tau})^2}{2}\right\}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{d_-^2}{2} - \sigma\sqrt{\tau} d_- - \frac{\sigma^2\tau}{2}\right\} = f_N(d_-)\frac{K}{S_t} e^{-r\tau}$$

となる． 2. BS 公式 (4.1.10) を用いれば，

$$\frac{\partial C}{\partial t}(t, S_t) = S_t f_N(d_+)\frac{\partial d_+}{\partial t} - re^{-r\tau} K F_N(d_-) - e^{-r\tau} K f_N(d_-)\frac{\partial d_-}{\partial t}$$

となる．ただし，$\tau = T - t$ であることに注意すると，

$$\frac{\partial d_\pm}{\partial t} = \frac{\log \frac{S_t}{K}}{2\sigma\tau^{3/2}} - \frac{r \pm \frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma\sqrt{\tau}}$$

を得る．同様にして $\dfrac{\partial C}{\partial x}(t, S_t)$ や $\dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t, S_t)$ も計算可能である．1 の結果を合わせると，BS-PDE(4.2.11) が得られる．なお，$x = S_t$ においては $\dfrac{\partial d_+}{\partial x} = \dfrac{\partial d_-}{\partial x} = \dfrac{1}{S_t\sigma\sqrt{\tau}}$ である．

4-3 $f(t, x) := e^{\alpha t} x$ とおく．このとき，$\dfrac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) = \alpha f(t, X_t)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) = e^{\alpha t}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) = 0$ であるから，伊藤の公式より，

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \alpha f(u, X_u) du + \int_0^t e^{\alpha u} dX_u$$
$$= X_0 + \int_0^t \alpha e^{\alpha u} X_u du + \int_0^t e^{\alpha u}(-\alpha X_u du + dW_u) = X_0 + \int_0^t e^{\alpha u} dW_u$$

が成立する．従って，両辺に $e^{-\alpha t}$ を掛けると

$$X_t = e^{-\alpha t} X_0 + \int_0^t e^{-\alpha(t-u)} dW_u$$

となり，これが解である．

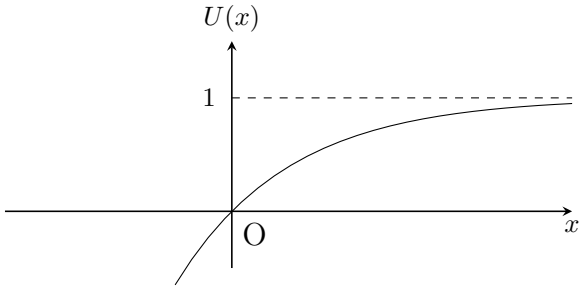
4-4 前半については，(4.1.11) より，$\dfrac{\partial P}{\partial t}(t, S_t) = \dfrac{\partial C}{\partial t}(t, S_t) + re^{-r(T-t)} K$, $\dfrac{\partial P}{\partial x}(t, S_t) = \dfrac{\partial C}{\partial x}(t, S_t) - 1$ 及び $\dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t, S_t) = \dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t, S_t)$ が成立するので，これらを (4.2.11) に代入すれば良い．デルタヘッジについては，ここで得た BS-PDE と伊藤の公式より

$$dP(t, S_t) = rP(t, S_t)dt + \sigma S_t \frac{\partial P}{\partial x}(t, S_t) dW_t$$

が成立する．よって，4.2.3 節と同じ議論より，プットのデルタヘッジは $\dfrac{\partial P}{\partial x}(t, S_t) = \dfrac{\partial C}{\partial x}(t, S_t) - 1$ により与えられる．

第 5 章　章末問題の解答 (問題は 97 ページに掲載)

5-1　1. 下図の通りである．凹であることは明らか．2. 5/8.



5-2　1. CML の傾き $= \dfrac{\mu_M - R_f}{\sigma_M} = \dfrac{0.5 - 0.1}{0.2} = 2.$

2. $\mu_a = a\mu_k + (1-a)\mu_M$, $\sigma_a^2 = a^2\sigma_k^2 + (1-a)^2\sigma_M^2 + 2a(1-a)\sigma_k\sigma_M\rho_{kM}$.

3. 2 の結果を用いると，

$$\begin{aligned}\lim_{a\to 0}\frac{\mu_a - \mu_M}{\sigma_a - \sigma_M} &= \lim_{a\to 0}\frac{(\mu_a - \mu_M)(\sigma_a + \sigma_M)}{\sigma_a^2 - \sigma_M^2}\\ &= \lim_{a\to 0}\frac{a(\mu_k - \mu_M)(\sigma_a + \sigma_M)}{a^2\sigma_k^2 + (-2a + a^2)\sigma_M^2 + 2a(1-a)\sigma_k\sigma_M\rho_{kM}}\\ &= \lim_{a\to 0}\frac{(\mu_k - \mu_M)(\sigma_a + \sigma_M)}{a\sigma_k^2 + (-2 + a)\sigma_M^2 + 2(1-a)\sigma_k\sigma_M\rho_{kM}}\\ &= \frac{(\mu_k - \mu_M)2\sigma_M}{-2\sigma_M^2 + 2\sigma_k\sigma_M\rho_{kM}} = \frac{\mu_k - \mu_M}{-\sigma_M + \sigma_k\rho_{kM}} = \frac{3}{2 - \rho_{kM}}.\end{aligned}$$

$\dfrac{3}{2-\rho_{kM}} = 2$ より，$\rho_{kM} = 1/2$. $\beta_k = \dfrac{\sigma_k\sigma_M\rho_{kM}}{\sigma_M^2} = 1/4.$

5-3　1. CML の傾き $= \dfrac{2 - 0.1}{0.4} = \dfrac{19}{4}$.　2. $\sigma_k = \dfrac{\beta_k\sigma_M}{\rho_{kM}}$.　3. 2 より明らか.

5-4　ベータの定義と CAPM(5.2.1) より，

$$\rho_{kM}S(R_M) = \rho_{kM}\frac{\mu_M - R_f}{\sigma_M} = \frac{\beta_k}{\sigma_k}(\mu_M - R_f) = S(R_k).$$

第 6 章　章末問題の解答 (問題は 106 ページに掲載)

6-1　確率測度 $\mathbf{P}$ の下では同じ分布を持つが，測度を変換したら分布が異なる 2 つの確率変数 X, Y の例を作ればよい．例えば，$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ とし，確率変数 X を $X(\omega_1) = X(\omega_2) = 1$, $X(\omega_3) = -1$, Y を $Y(\omega_1) = -1$, $Y(\omega_2) = Y(\omega_3) = 1$ により定義する．ここで，$k = 1, 2, 3$ に対して $\mathbb{P}(\{\omega_k\}) = 1/3$ で

あるとすれば，$\mathbf{P}(X=1)=\mathbf{P}(Y=1)=2/3$，$\mathbf{P}(X=-1)=\mathbf{P}(Y=-1)=1/3$であり，$X$と$Y$は同じ分布を持つ．一方，$\mathbf{Q}$を$\mathbf{Q}(\{\omega_1\})=\mathbf{Q}(\{\omega_2\})=1/4$と定義すると，$\rho_{\mathbf{Q}}(X)=\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[-X]=0$，$\rho_{\mathbf{Q}}(Y)=-1/2$となり，$\rho_{\mathbf{Q}}$はlaw-invariantではない．

6-2 分布が$\mathbf{P}(X=-1)=1/3$，$\mathbf{P}(X=1)=2/3$である確率変数Xを考える．$\lambda>0$に対して，

$$\rho_\beta^{\mathrm{ent}}(\lambda X)=\frac{1}{\beta}\log\mathbf{E}[e^{-\beta\lambda X}]=\frac{1}{\beta}\log\left\{\frac{1}{3}e^{\beta\lambda}+\frac{2}{3}e^{-\beta\lambda}\right\}$$

となる．ここで，関数$f(x):=x+\dfrac{2}{x}$は，$x>1$が十分1に近いとき$f(x)<3$であり，$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$となる．よって，$\lambda>0$が十分小さいとき$\rho_\beta^{\mathrm{ent}}(\lambda X)<0$であるが，$\lambda$が大きくなると$\rho_\beta^{\mathrm{ent}}(\lambda X)>0$となる．つまり，$\rho_\beta^{\mathrm{ent}}$はpositive homogeneityを持たない．

6-3 $0\in\mathcal{A}_\rho$より，任意の$\mathbf{Q}\in\mathcal{P}$に対して$\alpha(\mathbf{Q})\geq 0$である．ここで，ある$\mathbf{Q}\in\mathcal{P}$が存在して，$\alpha(\mathbf{Q})>0$であるとしよう．ペナルティ関数の定義より，ある$X\in\mathcal{A}_\rho$が存在し，$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[-X]>0$となる．なお，$\rho$はコヒーレントリスク測度であるから，任意の$a\geq 0$に対して$aX\in\mathcal{A}_\rho$である．よって，$\lim_{a\to\infty}\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[-aX]=\infty$であるから，$\alpha(\mathbf{Q})=\infty$となる．

6-4 1は簡単なので省略する．2. 確率変数Xに対して，$\rho_{\max}(X)=-X(\omega_X)$を満たす$\omega_X\in\Omega$が存在する．そこで，確率測度$\mathbf{Q}_X$を$\mathbf{Q}_X(\{\omega_X\})=1$により定義すると，$\rho_{\max}(X)=\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_X}[-X]\leq\sup_{\mathbf{Q}\in\mathcal{P}}\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[-X]$が成立する．一方，任意の$\mathbf{Q}\in\mathcal{P}$に対して，

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[-X]=-\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)\mathbf{Q}(\{\omega\})\leq-\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega_X)\mathbf{Q}(\{\omega\})=-X(\omega_X)$$

が成立するから，$\rho_{\max}(X)=\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_X}[-X]=\max_{\mathbf{Q}\in\mathcal{P}}\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[-X]$を得る．これよりペナルティ関数$\alpha_{\max}$は，$\alpha_{\max}(\mathbf{Q})=0,\forall\mathbf{Q}\in\mathcal{P}$により与えられる．この結果は，$\rho_{\max}$が最大のコヒーレントリスク測度であることを表している．
3. 任意の$\beta>0$に対して，$\rho_\beta^{\mathrm{ent}}(X)=\dfrac{1}{\beta}\log\mathbf{E}[e^{-\beta\lambda X}]\leq-X(\omega_X)$が成立する．一方，(6.2.1)より，

$$\begin{aligned}\lim_{\beta\to\infty}\rho_\beta^{\mathrm{ent}}(X)&=\lim_{\beta\to\infty}\max_{\mathbf{Q}\in\mathcal{P}}\left\{\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[-X]-\frac{1}{\beta}H(\mathbf{Q}|\mathbf{P})\right\}\\&\geq\lim_{\beta\to\infty}\left\{\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_X}[-X]-\frac{1}{\beta}H(\mathbf{Q}_X|\mathbf{P})\right\}=\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_X}[-X]=\rho_{\max}(X)\end{aligned}$$

となる．以上より，$\lim_{\beta\to\infty}\rho_\beta^{\mathrm{ent}}(X)=\rho_{\max}(X)$が成立する．

補遺:A　章末問題の解答 (問題は 125 ページに掲載)

A-1　$\mathbf{P}$ の σ-加法性より，$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A\cap B)+\mathbf{P}(A\cap B^c)$，$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A\cap B)+\mathbf{P}(A^c\cap B)$ 及び $\mathbf{P}(A\cup B) = \mathbf{P}(A\cap B)+\mathbf{P}(A\cap B^c)+\mathbf{P}(A^c\cap B)$ が成立．これより，$p := \mathbf{P}(A\cap B)$ とおくと，$0.7 = p+(0.5-p)+(0.3-p)$ が成立し，$p = 0.1$ を得る．

A-2　$A :=$ { 病気に罹っている }，$B :=$ { 陽性反応が出た } とおく．求めたい確率は $P(A|B)$ であり，条件から $\mathbf{P}(A) = 0.01$，$\mathbf{P}(B|A^c) = 0.1$ 及び $P(B|A) = 1$ である．よって，

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A|B) &= \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B\cap A)+\mathbf{P}(B\cap A^c)}\\ &= \frac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A)+\mathbf{P}(A^c)\mathbf{P}(B|A^c)}\\ &= \frac{0.01}{0.01\times 1+(1-0.01)\times 0.1}\\ &= \frac{0.01}{0.01+0.099} = \frac{0.01}{0.109} = \frac{10}{109}\end{aligned}$$

A-3　例 A.6 より，X の分布関数 F_X は，

$$F_X(t) = \int_0^t \alpha e^{-\alpha x}dx = 1-e^{-\alpha t}$$

であるから，$\mathbf{P}(X>t) = 1-F_X(t) = e^{-\alpha t}$ となる．以上より，

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X>s+t|X>t) &= \frac{\mathbf{P}(\{X>s+t\}\cap\{X>t\})}{\mathbf{P}(X>t)} = \frac{\mathbf{P}(X>s+t)}{\mathbf{P}(X>t)}\\ &= \frac{e^{-\alpha(s+t)}}{e^{-\alpha t}} = e^{-\alpha s} = \mathbf{P}(X>s).\end{aligned}$$

A-4　1. $\mathbf{E}[S_n] = n\mathbf{E}[X_1] = n(1\cdot p+0\cdot q) = np$. $\mathrm{Var}[S_n] = \mathrm{Var}\left[\sum_{k=1}^n X_k\right] = \sum_{k=1}^n \mathrm{Var}[X_k] = n\,\mathrm{Var}[X_1] = n((1-p)^2\cdot p+(0-p)^2\cdot q) = n(q^2p+p^2q) = npq$.
2. 大数の強法則 (定理 A.10) より，$\alpha = p$ である．3. 中心極限定理 (定理 A.11) より，$\dfrac{S_n-np}{\sqrt{npq}}$ は標準正規分布に分布収束するから，f は標準正規分布の確率密度関数である．(A.4.2) も中心極限定理の一種であり，**de Moivre-Laplace の定理** (de Moivre-Laplace's theorem) という．

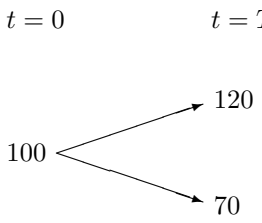
補遺 C:　過去の試験問題

ファイナンス論 a の試験問題

2023 年度

1. (10 点) 元本 10,000 円の 1 年後の将来価値を，半年複利 (複利期間を半年とした複利計算) で求めよ．ただし，金利は 0.1 とする．

2. ($15 + 10 \times 3 = 45$ 点) 以下の 1 期間 2 項モデルを考えよ．ただし，金利は 0.1 とする．



   (a) この市場が無裁定条件を満たすことを，第一基本定理を用いずに証明せよ．(ヒント: 背理法を用いよ．)

   (b) マルチンゲール確率を求めよ．

   (c) 行使価格 90 のプットオプションの複製戦略を求めよ．

   (d) このオプションの価格を求めよ．

3. (15 点) $S_0 = 90$, $u = 4/3$, $d = 2/3$, $r = 0$ の 2 期間 2 項モデルを考える．行使価格 K のコールオプションの時刻 0 における価格が 23 であるとする．K の値を求めよ．

4. (10 点) ショートレートが正である多期間 2 項モデルにおいて，行使時点における原資産価格の 2 乗がペイオフとなるアメリカ型オプション (つまり，ペイオフ関数が $f(x) = x^2$ となるオプション) を考える．このオプションに対して早期行使が起きないことを証明せよ．

5. (10 点) 信頼水準 $1-\lambda$ のバリューアットリスク VaR_λ が cash-invariance をもつことを証明せよ．

ファイナンス論 b の試験問題

2023 年度

1. (10 点) $\{W_t\}$ を標準ブラウン運動とする．このとき，$\mathbb{E}[W_t^3]$ の値を求めよ．

2. (10 点) 表が出る確率が p であるコインを投げ続ける．中心極限定理を用いて $\mathbb{P}(S_{500} \geq 125)$ の値を近似的に求めると 0.5 であった．ただし，S_{500} は 500 回目までに表が出た回数を表す確率変数である．このときの p の値を求めよ．

3. (20 点) Black-Scholes モデルにおいて，ボラティリティが増大するとプットオプション価格も増大することを証明せよ．ただし，講義ノートの章末問題 4-2 の 1 の結果を証明なしに用いても良い．

4. (20 点) Black-Scholes モデルにおいて，行使価格を 0 に近づけたときのコールオプション価格の極限を求めよ．

5. ($10 \times 3 = 30$ 点) CAPM に関して，以下の問に答えよ．ただし，市場ポートフォリオの期待収益率と標準偏差はそれぞれ 0.3，0.1，CML の傾きは 2，第 k 資産のベータは 1.2 であるとする．

   (a) 安全資産の収益率を求めよ．

   (b) 第 k 資産の期待収益率を求めよ．

   (c) 第 k 資産の標準偏差の最小値を求めよ．

索 引

a.s., 118
acceptance set, 103
ATM, 11
AVaR, 101

Black, 72
Black-Scholes SDE, 69
Black-Scholes 公式, 67
Black-Scholes 偏微分方程式, 72
Black-Scholes モデル, 59
Black の CAPM, 93
Brown 運動, 59, 123

CAPM, 89
cash-invariance, 100
CDS, 12
CML, 91
Cox-Ross-Rubinstein(CRR) 公式, 49, 51
CVaR, 101

de Moivre-Laplace の定理, 135

ES, 101

$\mathcal{F}$-可測, 114
Fama-French の 3 ファクターモデル, 95
Farkas の補題, 30
FTAP, 23

Gordon モデル, 4

HV, 75

i.i.d., 41, 112
in prob, 118
ITM, 10
IV, 76

Jensen のアルファ, 93
Jensen の不等式, 56

law-invariance, 100

Merton, 73

OTC, 7
OTM, 11

positive homogeneity, 100
p 次平均収束, 118

Radon-Nikodym 導関数, 63
RV, 76

Scholes, 72
SDE, 69
self-financing(多期間 2 項モデル), 42
self-financing(連続時間モデル), 71
Sharpe レシオ, 92
σ-加法性, 108
σ-加法族, 43, 114
SV, 77

TIBOR, 7
Treynor 測度, 92
TVaR, 101

VaR, 99

アウト・オブ・ザ・マネー, 11
アジアンオプション, 10

アット・ザ・マネー, 11
アメリカ型オプション, 10, 53
安全資産, 12
1 期間 3 項モデル, 26
1 期間 2 項モデル, 16
1 期間モデル, 16
伊藤の公式, 70
イン・ザ・マネー, 10
インプライドボラティリティ, 76
イールド, 5
イールドカーブ, 6
受け渡し, 7
受渡日, 7
売り手, 10
売りポジション, 8
エキゾチックオプション, 10
エントロピックリスク測度, 103
凹関数, 86
オプション, 9
オプション価格, 11
オプション価格付け理論, i, 11
オペレーショナルリスク, 98
買い手, 10
買いポジション, 8
カウンターパーティーリスク, 8, 98
核, 35
拡散係数, 123
各点収束, 117
確率, 13, 108
確率過程, 14, 109
確率関数, 109
確率空間, 108, 114
確率収束, 118
確率積分, 69
確率測度, 13, 108, 113
確率微分方程式, 69
確率変数, 13, 16, 109, 114
確率ボラティリティモデル, 77
確率モデル, 13
可算, 109
可測, 43, 114
可測空間, 108, 113
可測集合, 113
株式, 3
株主, 3
可予測, 44
空売り, 15
完全競争的, 14
完備, 25
概収束, 118
ガウス積分, 116
額面, 5
元本, 1
ガンマ, 75
幾何 Brown 運動, 59
企業金融論, i
危険資産, 12
期待効用, 86
期待収益率, 81
期待ショートフォール, 101
期待値, 109
期待超過収益率, 92
基本定理 (1 期間 2 項モデル), 23
基本定理 (多期間 2 項モデル), 45
キャッシュフロー, 2
キャリブレーション, 14
共分散, 110
強法則, 119
局所ボラティリティモデル, 78
均衡, 90
金融工学, i
金融派生証券, 7
金利, 1
金利スワップ, 11
金利の期間構造, 7
逆イールド, 6
行ベクトル, 28
行列, 28

空集合, 108
クオンツ, 4
クレジットスプレッド, 6
クレジット・デフォルト・スワップ, 12
クーポン, 5
クーポンレート, 5
グリークス, 75
権利行使価格, 9
現在価値, 1
原資産, 7
現物価格, 8
行使価格, 9
高頻度データ, 76
効用, 81
効用関数, 86
効率的市場仮説, i
効率的フロンティア (安全資産がある場合), 85
効率的フロンティア (安全資産がない場合), 84
小型株効果, 95
国債, 5
コヒーレントリスク測度, 102
固有リスク, 95
コールオプション, 9, 17
債券, 4
裁定価格理論, 96
裁定機会, 9
裁定機会 (1 期間 2 項モデル), 18
裁定機会 (一般化された 1 期間モデル), 29
裁定機会 (多期間 2 項モデル), 42
債務不履行, 5
先物価格, 7
先物契約, 7
先渡価格, 7
先渡契約, 7
資産価格理論の基本定理 (1 期間 2 項モデル), 23
資産価格理論の基本定理 (多期間 2 項モデル), 45
資産価格理論の第一基本定理 (1 期間 2 項モデル), 23
資産価格理論の第一基本定理 (一般化された 1 期間モデル), 30
資産価格理論の第二基本定理 (1 期間 2 項モデル), 26
資産価格理論の第二基本定理 (一般化された 1 期間モデル), 35
市場ポートフォリオ, 90
市場リスク, 98
システマティックリスク, 94
下から連続, 105
資本資産評価モデル, 89
資本市場線, 91
社債, 5
収益, 80
収益率, 80
集合族, 108
償還, 5
証拠金, 8
将来価値, 1
ショートレート, 40
シングルファクターモデル, 94
信用リスク, i, 5, 98
信頼水準, 99
時価総額, 89
次元, 36
自己資本比率, 98
実行可能領域, 82
弱収束, 120
弱法則, 119
順イールド, 6
条件付き確率, 112
条件付き期待値, 112
条件付きバリューアットリスク, 101
錘, 32
数理ファイナンス, i

スポット, 8
スワップ, 11
接点ポートフォリオ, 85
線形写像, 35
線形部分空間, 35
戦略, 8, 17
ゼロクーポン債, 5
ゼロ成長モデル, 4
ゼロベータ CAPM, 93
ゼロベータポートフォリオ, 93
全称記号, 30
相関係数, 111
早期行使, 53
相対エントロピー, 105
想定元本, 11
存在記号, 30
像, 35
対称 (ランダムウォーク), 123
大数の強法則, 120
大数の弱法則, 119
大数の法則, 119
互いに素, 108
多期間 2 項モデル, 40
単純 (ランダムウォーク), 122
単調性, 100
単利, 2
第一基本定理 (1 期間 2 項モデル), 23
第一基本定理 (一般化された 1 期間モデル), 30
第二基本定理 (1 期間 2 項モデル), 26
第二基本定理 (一般化された 1 期間モデル), 35
チェビシェフの不等式, 118
地方債, 5
中心極限定理, 120
超平面, 33
追加証拠金, 8
通貨スワップ, 11
定義関数, 63, 118
停止時刻, 79
定常増分性, 123
定率成長モデル, 4
適合過程, 44
テクニカル分析, 4
転換社債, 5
店頭市場, 7
テールバリューアットリスク, 101
ディスカウントファクター, 1
デフォルト, 5
デリバティブ, 7
デルタ, 74
投資の理論, i
特性関数, 117
凸関数, 55
凸集合, 32
凸錘, 32
凸リスク測度, 102
取引費用, 14
(2 つの測度が) 同値, 63
同値マルチンゲール測度, 63
同様に確からしい, 108
独立, 111
独立増分性, 123
独立同一分布, 112
ドリフト係数, 59, 123
ドリフト付き Brown 運動, 59, 123
内積, 29
二項係数, 51
2 項モデル, 16
値洗い, 8
ノックアウトオプション, 10
配当, 3
配当政策, 4
配当割引モデル, 4
倍々戦略, 46, 60
バリューアットリスク, 99
バーゼル合意, 98
パー, 6

パーレート, 6
非完備, 27
非システマティックリスク, 95
ヒストリカルボラティリティ, 75
非負ベクトル, 30
標準 Brown 運動, 59, 123
標準化, 116
標準偏差, 110
標本空間, 13, 107
標本路, 41
ファクター, 94
ファットテイル, 77
ファンダメンタル分析, 4
フィルトレーション, 43
フォワード, 7
不確実性, 13
複製 (1 期間 2 項モデル), 17
複製 (多期間 2 項モデル), 43
複製可能 (1 期間 2 項モデル), 25
複製可能 (一般化された 1 期間モデル), 34
複利, 2
複利期間, 3
分散, 110
分布, 109
分布関数, 114
分布収束, 120
(ポートフォリオ理論における) 分離定理, 85
(凸集合に対する) 分離定理, 32
プットオプション, 9
プットコールパリティ (1 期間 2 項モデル), 20
プットコールパリティ (Black-Scholes モデル), 68
プットコールパリティ (アメリカ型オプション), 58
プライステイカー, 14
プレインバニラオプション, 10
プレミアム, 11, 18
平均バリューアットリスク, 101
平均分散アプローチ, 80
ヘッジ, 11
ベガ, 75
べき集合, 108
ベータ, 92
ペイオフ, 10
ペイオフ関数, 55
ペナルティ関数, 104
法線ベクトル, 33
法則収束, 120
補集合, 114
ほとんど確実に, 118
本質的に有界, 102
簿価・時価比率, 95
ボラティリティ, 59
ボラティリティサーフェス, 77
ボラティリティスキュー, 77
ボラティリティスマイル, 76
ポアソン分布, 115
ポートフォリオ, 17
ポートフォリオの評価手法, 92
ポートフォリオ理論, i
マイクロストラクチャーノイズ, 76
摩擦のない市場, 14
マルチファクターモデル, 94
マルチンゲール, 22, 61, 113
マルチンゲール確率 (1 期間 2 項モデル), 22
マルチンゲール確率 (一般化された 1 期間モデル), 29
マルチンゲール確率 (多期間 2 項モデル), 44
満期, 5, 9
無記憶性, 125
無裁定価格理論, 20
無裁定条件, 18
無差別曲線, 86

約定日, 7
有価証券, 3
優ヘッジコスト, 27
歪んだ傘, 83
ユーロ円, 7
ヨーロッパ型オプション, 9
ランダムウォーク, 60, 122
リアライズドボラティリティ, 76
離散型, 12
離散型確率変数, 114
利子, 1
リスク, 5
リスク (平均分散アプローチ), 81
リスク回避的, 86
リスク管理, i
リスク測度, 99
リスク中立確率, 22
リスクの数量化, 98
リターン (平均分散アプローチ), 81
利回り, 5
流動性リスク, 98
ルベーグ積分, 115
零ベクトル, 31
劣加法性, 100
列ベクトル, 28
連続型, 12
連続型確率変数, 115
割引債, 5
割引率, 1
割り引く, 1